Complexes, transformations et signaux

Terminale STI2D · spécialité maths · Chapitre 05

La notation exponentielle complexe

Définition · Comprendre la notation

On note $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Un complexe non nul s'écrit $r\mathrm{e}^{i\theta}$. Les règles admises donnent $\mathrm{e}^{i\alpha}\mathrm{e}^{i\beta} = \mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}$ et $\mathrm{e}^{i\alpha}/\mathrm{e}^{i\beta} = \mathrm{e}^{i(\alpha-\beta)}$. Dans un produit, les modules se multiplient et les arguments s'additionnent. Dans un quotient, ils se divisent et se soustraient. Pour une puissance entière, $(r\mathrm{e}^{i\theta})^n = r^n\mathrm{e}^{in\theta}$. Les arguments restent définis modulo 2π.

Résoudre des équations simples

Définition · Comprendre la notion

Pour $a \neq 0$, l'équation $az + b = 0$ a pour solution $z = -b/a$. Le quotient se calcule dans la forme adaptée aux données. Pour $z^2 = c$ avec c réel : si $c > 0$, les solutions sont $\pm\sqrt{c}$; si $c = 0$, la solution est zéro ; si $c < 0$, les solutions sont $\pm i\sqrt{-c}$. Vérifie par substitution et garde les deux signes pour un carré non nul. Les complexes permettent de résoudre une équation sans solution réelle, sans attribuer une racine carrée réelle à un nombre négatif.

Translations, rotations et homothéties

Définition · Comprendre la notion

La transformation $w = z + b$ est une translation de vecteur d'affixe b. Pour un réel k non nul, $w = kz$ est une homothétie de centre O et de rapport k. Les distances à O sont multipliées par $|k|$; un k négatif place l'image de l'autre côté de O. La transformation $w = \mathrm{e}^{i\theta}z$ est une rotation de centre O et d'angle θ : elle conserve les modules et ajoute θ aux arguments. Pour un centre d'affixe a, on peut d'abord déplacer l'origine : $w - a = \mathrm{e}^{i\theta}(z - a)$ décrit une rotation autour de a. Cette écriture se justifie en comparant les déplacements depuis le centre.

Formules d'addition, duplication et linéarisation

Définition · Comprendre la notion

Les formules d'addition sont

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b,$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b.$$

Elles se démontrent en développant $(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$ et en identifiant les parties réelle et imaginaire avec $\mathrm{e}^{i(a+b)}$. Pour $b = a$, on obtient $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$ et

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 a.$$

Ainsi $\cos^2 a = (1+\cos 2a)/2$ et $\sin^2 a = (1-\cos 2a)/2$. Cette linéarisation transforme des carrés trigonométriques en sommes, utiles pour calculer des primitives.

Réduire une combinaison sinus-cosinus

> **Définition · Comprendre la notation**
>
> Pour écrire $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ avec $A>0$, développe le membre droit :
>
> $$A\cos\varphi\cos(\omega t)-A\sin\varphi\sin(\omega t).$$
>
> Il faut donc $A\cos\varphi=a$ et $-A\sin\varphi=b$. En ajoutant les carrés, $A=\sqrt{a^2+b^2}$; puis $\cos\varphi=a/A$ et $\sin\varphi=-b/A$ déterminent le quadrant. Le signe moins est essentiel dans la convention cosinus. Si a et b sont nuls, le signal est nul et aucune phase particulière n'est imposée.

Les repères essentiels

La notation exponentielle complexe.

1. Écris chaque complexe non nul avec un module positif et un argument.
2. Pour un produit, multiplie les modules et additionne les arguments.
3. Pour un quotient, divise les modules et soustrais les arguments.
4. Pour une puissance, élève le module à cette puissance et multiplie l'angle.
5. Réduis l'angle modulo 2π puis contrôle avec une forme algébrique lorsque c'est simple.

Résoudre des équations simples.

1. Identifie le degré de l'équation et les coefficients non nuls.
2. Au premier degré, isole z puis effectue le quotient avec la forme adaptée.
3. Pour $z^2=c$ réel, distingue c positif, nul et négatif.
4. Garde les deux signes lorsque c est non nul et justifie l'exhaustivité par un produit nul.
5. Substitue chaque solution dans l'équation initiale.

Translations, rotations et homothéties.

1. Identifie si la formule ajoute une affixe, multiplie par un réel ou par un facteur de module un.
2. Calcule l'image en regroupant les composantes ou en utilisant modules et arguments.
3. Identifie le centre, le vecteur, le rapport ou l'angle de la transformation.
4. Pour un centre a, travaille sur le déplacement $z-a$ avant de revenir à w.
5. Contrôle la propriété attendue : distance conservée, rapport positif des distances ou déplacement constant.

Formules d'addition, duplication et linéarisation.

1. Identifie la structure : somme, différence, angle double ou carré.
2. Écris la formule symbolique avant de remplacer les angles.
3. Garde le signe moins dans l'addition du cosinus et contrôle les parités pour une différence.
4. Pour une linéarisation, double tout l'argument.
5. Pour une primitive obtenue, dérive le résultat afin de contrôler les facteurs.

Réduire une combinaison sinus-cosinus.

1. Annonce la convention choisie pour la sinusoïde résultante.
2. Développe cette forme et identifie les coefficients du sinus et du cosinus.
3. Calcule $A=\sqrt{a^2+b^2}$ puis traite le cas A égal à zéro.
4. Détermine la phase avec son cosinus, son sinus et le bon quadrant.

5. Contrôle en redéveloppant la forme obtenue, puis sur une ou deux valeurs simples de t.

Un exemple pour se repérer

> **Exemple · Exemple commenté**
>
> Pour $3\cos t + 4\sin t$, l'amplitude vaut $\sqrt{3^2+4^2} = 5$. La phase doit satisfaire $\cos\varphi = 3/5$ et $\sin\varphi = -4/5$. On choisit donc une phase du quatrième quadrant, par exemple $\varphi \approx -0{,}9273$.
>
> Le développement vérifie
>
> $$\begin{aligned} 5\cos(t+\varphi) &= 5\cos\varphi\cos t - 5\sin\varphi\sin t \\ &= 3\cos t + 4\sin t. \end{aligned}$$
>
> À t égal à zéro, les deux écritures donnent 3. À t égal à $\pi/2$, elles donnent 4. Une phase de signe positif aurait transformé le coefficient du sinus en -4 et aurait décrit un autre signal.

Les erreurs à éviter

> **Attention · Comprendre une erreur fréquente**
>
> Dans un produit, les angles s'additionnent ; ils ne se multiplient pas. C'est une puissance qui multiplie un angle par l'exposant.