Suites, sommes et évolutions

Terminale STMG et STI2D · commun · Chapitre 01

Ajouter toujours la même quantité

Définition · Comprendre la notion

Une suite est arithmétique si $u_{n+1} = u_n + r$ pour une constante r, appelée raison. Entre deux étapes, la différence est donc constante. À partir du rang 0 : $u_n = u_0 + nr$. À partir d'un rang p : $u_n = u_p + (n-p)r$. La formule compte le nombre d'ajouts entre les deux rangs. Si $r > 0$, la suite croît ; si $r < 0$, elle décroît ; si $r = 0$, elle est constante. Ses points sont alignés, mais ses rangs restent entiers. Une hausse d'un montant fixe est arithmétique ; une hausse d'un pourcentage fixe ne l'est généralement pas.

Multiplier toujours par le même facteur

Définition · Comprendre la notion

Une suite est géométrique si $u_{n+1} = qu_n$ pour une constante q, sa raison. Dans ces parcours, on étudie surtout les termes positifs et les raisons strictement positives. Alors $u_n = u_0 q^n$, ou $u_n = u_p q^{n-p}$ à partir d'un autre rang. Une évolution au taux constant t correspond à $q = 1 + t$. Pour $u_0 > 0$, si $q > 1$, la suite croît ; si $0 < q < 1$, elle décroît ; si $q = 1$, elle est constante. Pour reconnaître une suite géométrique à termes non nuls, compare les quotients de termes consécutifs. Une raison de $1{,}04$ signifie une hausse de $4\,\%$.

Additionner une suite arithmétique

Définition · Comprendre la notion

Pour additionner N termes consécutifs d'une suite arithmétique, utilise

$$S = N\,\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

L'idée est d'associer le premier et le dernier, le deuxième et l'avant-dernier : chaque paire a la même somme. En écrivant la somme dans les deux sens, on obtient $2S = N(\text{premier} + \text{dernier})$. De u_p à u_n inclus, le nombre de termes est $n - p + 1$. En particulier, de u_0 à u_n, il y a $n + 1$ termes et non n. Une valeur à une date et un total cumulé sont deux questions différentes.

Additionner une suite géométrique

Définition · Comprendre la notion

Pour $q \neq 1$ et $N \geq 1$,

$$1 + q + \cdots + q^{N-1} = \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

Multiplier la somme par q décale tous les termes ; soustraire fait disparaître les termes intermédiaires. Pour N termes à partir de u_p, on obtient $S = u_p(1 - q^N)/(1 - q)$. Si $q = 1$, tous les termes sont égaux et $S = Nu_p$: la fraction précédente n'est pas définie. Cette formule calcule une accumulation de quantités successives, par exemple une production ou des versements. Il faut identifier la date du premier versement et le nombre de termes.

Déterminer la première étape qui satisfait une condition

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Un seuil sur une suite peut être recherché avec une table, un programme ou une inéquation. Une croissance ou une décroissance justifiée permet de parler du premier rang. Pour une suite arithmétique, on résout une inéquation du premier degré puis on choisit un entier. Pour une suite géométrique, une table convient ; lorsque les logarithmes sont connus, ils permettent aussi de résoudre l'inéquation. Dans tous les cas, vérifie le rang retenu et le rang précédent. La distinction entre $>$ et $\geq$ change parfois la réponse.

Les repères essentiels

Ajouter toujours la même quantité.

1. Calcule une différence « terme suivant moins terme précédent » pour identifier r.
2. Compte les étapes par une différence de rangs.
3. Applique $u_n = u_p + (n-p)r$ en conservant le signe de r.
4. Si r est inconnue, divise la différence des valeurs par la différence des rangs.
5. Contrôle le résultat avec un terme connu et les contraintes du contexte.

Multiplier toujours par le même facteur.

1. Identifie le facteur multiplicatif q, notamment à partir d'un pourcentage.
2. Compte le nombre de multiplications depuis le rang connu.
3. Applique $u_n = u_p q^{n-p}$; garde la précision jusqu'au dernier calcul.
4. Pour retrouver q, relie les termes connus et utilise les hypothèses de signe.
5. Contrôle un calcul par récurrence et vérifie que la tendance est cohérente.

Additionner une suite arithmétique.

1. Identifie le premier et le dernier rang de la somme, bornes incluses.
2. Calcule les deux termes extrêmes avec la formule de la suite.
3. Compte $N = n - p + 1$ termes, puis applique $S = N(u_p + u_n)/2$.
4. Contrôle l'ordre de grandeur : pour des termes positifs, le total est entre N fois le plus petit et N fois le plus grand.
5. Traduis le total dans l'unité demandée, sans le confondre avec le dernier terme.

Additionner une suite géométrique.

1. Identifie le premier terme a, la raison q et le nombre N de termes.
2. Si $q = 1$, calcule Na ; sinon, utilise $a(1-q^N)/(1-q)$.
3. Respecte les parenthèses et calcule la puissance avant les soustractions.
4. Conserve les décimales utiles et annonce la règle d'arrondi.
5. Contrôle par une addition courte ou par un encadrement cohérent du total.

Déterminer la première étape qui satisfait une condition.

1. Écris précisément l'inégalité demandée et le domaine des rangs.
2. Contrôle les variations et la possibilité d'atteindre le seuil.
3. Résous l'inégalité ou calcule les termes jusqu'au franchissement.

4. Choisis le premier entier autorisé, en respectant le signe strict ou large.
5. Vérifie le rang retenu et le précédent, puis traduis le rang en date ou en nombre d'étapes.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Calculons la somme des termes u_0 à u_4 de $u_n = 10 + 2n$. Les termes sont 10, 12, 14, 16 et 18 : il y en a cinq. La somme écrite à l'envers est 18, 16, 14, 12 et 10.

En additionnant les deux lignes, chaque colonne vaut 28. On obtient

$$\begin{aligned} 2S &= 5 \times 28 \\ &= 140, \end{aligned}$$

donc $S = 70$. La formule donne directement

$$\begin{aligned} S &= 5(10 + 18)/2 \\ &= 70. \end{aligned}$$

Le contrôle par addition, $10 + 12 + 14 + 16 + 18 = 70$, confirme le résultat. La moyenne des cinq termes est $70/5 = 14$, qui est aussi la moyenne des extrêmes $(10 + 18)/2$. Cette propriété repose sur les écarts constants de la suite arithmétique.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Entre les rangs 1 et 12, il y a onze étapes mais douze termes si l'on compte les deux extrémités. Pour calculer un terme, on compte les étapes ; pour additionner des termes, on compte les termes.