Exponentielles et logarithme décimal

Terminale STMG et STI2D · commun · Chapitre 02

Prolonger les puissances à des exposants réels

Définition · Comprendre la notion

Pour une base q strictement positive, les puissances q^x sont définies pour tout réel x. On conserve $q^{x+y} = q^x q^y$, $q^{-x} = 1/q^x$ et $(q^x)^y = q^{xy}$. En particulier, $q^{1/n}$ est la racine n-ième positive de q. Ces règles prolongent les suites géométriques à un temps continu. La fonction $x \mapsto q^x$ est positive ; elle croît si $q > 1$, décroît si $0 < q < 1$, et vaut constamment 1 si $q = 1$. Une base négative ne permet pas ce prolongement réel pour tout x.

Modéliser une évolution exponentielle

Définition · Comprendre la notion

Un modèle exponentiel s'écrit $f(t) = Aq^t$, avec $A > 0$ et $q > 0$. A est la valeur à t = 0 ; q est le coefficient multiplicateur par unité de temps. Un taux constant de $+r$ donne $q = 1 + r$; une baisse de taux r donne $q = 1 - r$. Une croissance exponentielle correspond à un taux relatif constant, pas à un accroissement absolu constant. Le choix de l'unité de temps est essentiel. Pour deux instants a et b, $f(b)/f(a) = q^{b-a}$. Le modèle doit être limité au contexte où son taux reste plausible.

Calculer un taux moyen d'évolution

Définition · Comprendre la notion

Si le coefficient global sur n périodes est C > 0, le coefficient constant équivalent q vérifie $q^n = C$. Donc $q = C^{1/n}$ et le taux moyen est $t = C^{1/n} - 1$. Si les taux successifs sont connus, calcule d'abord $C = (1 + t_1) \cdots (1 + t_n)$. Leur moyenne arithmétique n'est généralement pas le taux moyen multiplicatif. La réponse doit préciser la période : annuel, mensuel, ou par étape. Garde les coefficients non arrondis pendant le calcul puis vérifie que leur puissance reconstitue C.

Le logarithme décimal

Définition · Comprendre la notion

Pour $a > 0$, $\log(a)$ est l'unique réel x tel que $10^x = a$. Ainsi $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$ et $\log(10^x) = x$. Pour a,b strictement positifs, $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log(a/b) = \log a - \log b$ et $\log(a^r) = r \log a$. Il n'existe pas de règle analogue transformant le logarithme d'une somme en somme de logarithmes. Le logarithme décimal est strictement croissant sur $]0; +\infty[$. Il est négatif entre 0 et 1, nul en 1, positif au-delà. Son rôle est de retrouver un exposant et de comparer des ordres de grandeur.

Résoudre un seuil exponentiel avec un logarithme

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Pour $A > 0$, $q > 0$, $q \neq 1$ et $B > 0$, l'équation $Aq^x = B$ donne $x = \log(B/A)/\log q$. Pour une inéquation, le logarithme conserve le sens, mais diviser par $\log q$ le conserve si $q > 1$ et l'inverse si $0 < q < 1$. Si le temps est compté en périodes entières, choisis ensuite l'entier adapté à l'inégalité stricte ou large. Vérifie cet entier et son voisin précédent dans l'expression initiale, avec une précision suffisante. Un logarithme d'un nombre négatif ou nul n'est jamais une étape autorisée.

Les repères essentiels

Prolonger les puissances à des exposants réels.

1. Vérifie que la base est strictement positive.
2. Interprète un exposant négatif comme un inverse.
3. Interprète un exposant fractionnaire comme une racine positive.
4. Choisis la règle adaptée à un produit, quotient ou puissance de puissance.
5. Contrôle le résultat en revenant à une puissance entière si possible.

Modéliser une évolution exponentielle.

1. Repère la valeur initiale et l'unité de temps.
2. Traduis le taux ou la proportion conservée en coefficient q.
3. Écris $f(t) = Aq^t$ et contrôle $f(0) = A$.
4. Calcule la puissance avant de multiplier par A.
5. Arrondis seulement à la fin et précise que le résultat dépend du modèle.

Calculer un taux moyen d'évolution.

1. Calcule le coefficient global final divisé par initial, ou le produit des coefficients.
2. Compte les périodes réellement écoulées.
3. Calcule $q = C^{1/n}$ sans arrondir prématurément.
4. Passe au taux $q - 1$ puis au pourcentage.
5. Vérifie que la puissance du coefficient reconstitue C.

Le logarithme décimal.

1. Vérifie que chaque argument de logarithme est strictement positif.
2. Pour une puissance de 10, lis directement l'exposant.
3. Choisis uniquement une propriété de produit, quotient ou puissance.
4. Pour un exposant inconnu, prends le logarithme puis isole cet exposant.
5. Contrôle l'ordre de grandeur et le domaine de la solution.

Résoudre un seuil exponentiel avec un logarithme.

1. Écris le seuil avec le bon signe strict ou large.
2. Divise par A puis prends le logarithme des membres positifs.
3. Fais descendre l'exposant et vérifie le signe de $\log q$.
4. Isole la variable en inversant l'inégalité si nécessaire.
5. Choisis le premier entier admissible et vérifie ce rang avec son précédent.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Une valeur passe de 100 à 121 en deux ans. Le coefficient global est $121/100 = 1{,}21$. On cherche q tel que $q^2 = 1{,}21$, donc $q = 1{,}1$.

Le taux annuel moyen est $1{,}1 - 1 = 0{,}1$, soit $10\,\%$. En effet, 100 devient 110, puis 121 : les deux hausses portent sur des bases différentes.

Diviser la hausse globale de $21\,\%$ par deux donnerait $10{,}5\,\%$. Mais $1{,}105^2 = 1{,}221025$, qui conduirait à 122,1025 et ne reproduit pas la valeur finale demandée.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Un exposant négatif ne rend pas la puissance négative. Avec une base positive, toutes les puissances réelles restent positives.