Dérivation et fonction inverse

Terminale STMG et STI2D · commun · Chapitre 03

Comprendre la fonction inverse

Définition · Comprendre la notion

La fonction inverse est $f(x) = 1/x$, définie pour $x \neq 0$. Son signe est celui de x ; elle ne s'annule jamais. Sa courbe a deux branches et est symétrique par rapport à l'origine, car $f(-x) = -f(x)$. Elle décroît sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$. On ne dit pas qu'elle décroît sur tout son domaine sans distinguer les deux intervalles. Quand x devient grand en valeur absolue, $1/x$ se rapproche de 0. Quand x approche 0 par valeurs positives, l'image grandit sans borne ; par valeurs négatives, elle diminue sans borne. Les axes sont des asymptotes.

Dériver l'inverse et ses applications

Définition · Comprendre la notion

Pour $x \neq 0$, la dérivée de $1/x$ vaut $-1/x^2$. Le carré du dénominateur est positif, donc la dérivée est strictement négative : l'inverse décroît sur chacune de ses deux branches. Pour $f(x) = a/x + b$ avec a et b constants, $f'(x) = -a/x^2$. Le signe dépend donc de a. La règle permet d'étudier un coût moyen, une durée à débit variable ou une autre grandeur inversement proportionnelle. Garde les unités et le domaine du modèle : une quantité physique peut imposer $x > 0$.

Dériver les polynômes de degré au plus trois

Définition · Comprendre la notion

$(c)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées, et $(kf)' = kf'$ pour une constante k. Un terme constant disparaît parce que sa valeur ne varie pas. Applique la règle à chaque terme en gardant les signes. Une fois la fonction dérivée calculée, on peut évaluer sa valeur en un point. Ne remplace pas x trop tôt : dériver une valeur numérique donnerait zéro et perdrait la variation.

Du signe de la dérivée aux variations

Définition · Comprendre la notion

Sur un intervalle, une dérivée positive donne une fonction croissante ; une dérivée négative donne une fonction décroissante. On cherche les zéros de la dérivée puis on étudie son signe entre eux. Un changement de signe de positif à négatif indique un maximum local ; de négatif à positif, un minimum local. Une dérivée nulle sans changement de signe ne suffit pas. Le tableau de variations donne les valeurs aux bornes et aux points critiques. Un extremum global sur un intervalle fermé se détermine en comparant les valeurs possibles, y compris celles des bornes. Le signe de f et celui de sa dérivée décrivent deux choses différentes.

Optimiser une grandeur avec la dérivée

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Une optimisation cherche la plus petite ou la plus grande valeur d'une grandeur sous des contraintes. Choisis la variable, exprime la grandeur par une fonction et détermine son domaine. Étudie la dérivée, ses signes et les valeurs aux points critiques et aux bornes. Reviens ensuite au contexte : une longueur doit rester positive, une production peut être entière, une solution peut être hors du domaine. Un maximum local n'est pas automatiquement le maximum global. Pour un nombre entier d'objets, compare les entiers voisins du meilleur choix continu plutôt que d'arrondir sans contrôle.

Les repères essentiels

Comprendre la fonction inverse.

1. Annonce le domaine et les contraintes du contexte.
2. Pour calculer une image, remplace x par la valeur non nulle donnée.
3. Pour comparer, identifie d'abord la branche positive ou négative.
4. Avant de multiplier une inégalité par x, détermine son signe.
5. Dans un problème de personnes ou d'objets, conclus avec un entier admissible.

Dériver l'inverse et ses applications.

1. Identifie le coefficient a de l'inverse et la constante b.
2. Écris $f'(x) = -a/x^2$ sur le domaine autorisé.
3. Utilise $x^2 > 0$ pour étudier le signe.
4. Pour une tangente, calcule aussi l'image du point.
5. Interprète les variations et les unités dans le contexte.

Dériver les polynômes de degré au plus trois.

1. Repère la variable de dérivation et les coefficients constants.
2. Dérive chaque terme avec son signe.
3. Réunis les termes pour obtenir la fonction dérivée.
4. Remplace ensuite la variable par l'abscisse demandée.
5. Pour un paramètre, traduis la pente imposée en équation et vérifie la valeur trouvée.

Du signe de la dérivée aux variations.

1. Annonce l'intervalle étudié et calcule la dérivée.
2. Cherche ses zéros et étudie son signe sur chaque morceau.
3. Traduis les signes en flèches de variation.
4. Calcule les images des bornes et des points critiques.
5. Compare ces valeurs pour identifier les extrema demandés.

Optimiser une grandeur avec la dérivée.

1. Définis la variable, la grandeur à optimiser et le domaine autorisé.
2. Calcule la dérivée et ses zéros dans ce domaine.
3. Étudie son signe pour établir les variations.
4. Compare les valeurs aux points critiques et aux bornes.
5. Si la variable est entière, compare les candidats entiers puis formule la décision.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour $c(x) = 120/x + 5$ avec $x > 0$, on dérive chaque terme : $c'(x) = -120/x^2 + 0$. Cette dérivée est strictement négative, donc le coût moyen décroît.

À $x = 10$, le coût vaut 17 et la pente vaut $-120/100 = -1{,}2$. La pente négative explique une diminution locale, mais ne signifie pas que le coût lui-même est négatif.

Quand x augmente, $120/x$ se rapproche de zéro et c se rapproche de 5 par valeurs supérieures. La constante 5 influence donc les valeurs, tout en disparaissant dans la dérivée.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

La décroissance doit être annoncée séparément sur chaque intervalle. Elle ne permet pas de comparer un nombre négatif et un nombre positif comme s'ils appartenaient à une seule branche.