Ajustements et prévisions

Terminale STMG et STI2D · commun · Chapitre 04

Représenter deux variables par un nuage

Définition · Comprendre la notion

Une série à deux variables quantitatives contient des couples $(x_i ; y_i)$ observés sur les mêmes individus. Un nuage de points place chaque couple dans un repère. Annonce les variables, leurs unités et l'échelle des axes. Intervertir les colonnes modifie la question étudiée : prédire y à partir de x n'est pas la même opération que prédire x à partir de y. Le nuage permet d'observer une tendance, une courbure, des groupes ou des valeurs atypiques. Une tendance croissante ne signifie pas que chaque point est au-dessus du précédent ni qu'une relation de cause à effet est démontrée.

Construire un ajustement affine

Définition · Comprendre la notion

Un ajustement remplace un nuage imparfaitement aligné par une relation approchée $y = ax + b$. Une droite au jugé, une droite de Mayer ou une régression peuvent donner des ajustements différents. La méthode de Mayer partage les points ordonnés en deux groupes et relie leurs points moyens. La méthode des moindres carrés choisit a, b pour minimiser la somme des carrés des écarts verticaux $\sum (y_i - (ax_i + b))^2$; on utilise un outil numérique pour la déterminer. L'écart $y_i - \hat{y}_i$ s'appelle un résidu. Un nuage courbé ou des résidus organisés signalent qu'une droite peut être inadéquate. Arrondis les coefficients seulement à la précision utile.

Interpolation et extrapolation

Définition · Comprendre la notion

Une interpolation estime une valeur pour une abscisse à l'intérieur de l'intervalle observé. Une extrapolation utilise le modèle en dehors de cet intervalle ; elle demande davantage de prudence. Pour prévoir y, remplace x dans le modèle. Pour chercher la valeur de x correspondant à un objectif, résous l'équation du modèle. Si x est une date codée, reviens ensuite à la date réelle. Même à l'intérieur de l'intervalle, une prévision n'est pas une certitude individuelle. Vérifie son ordre de grandeur, son unité et la pertinence du modèle ; évite les extrapolations incompatibles avec une limite physique ou un marché saturé.

Reconnaître un modèle non linéaire

Définition · Comprendre la notion

Une droite ne convient pas à tous les nuages. Une courbure régulière peut inviter à examiner un modèle polynomial, exponentiel ou puissance à l'aide d'un outil numérique. À pas d'abscisse constant, des différences approximativement constantes suggèrent un modèle affine ; des rapports approximativement constants pour des ordonnées positives suggèrent un modèle exponentiel. Le choix ne repose pas seulement sur un coefficient : examine les résidus, les unités, le domaine de définition et la cohérence du phénomène. Un modèle plus compliqué peut épouser les données sans mieux prédire.

Linéariser un modèle exponentiel

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Pour des ordonnées strictement positives, un modèle $y = Aq^x$ avec $A > 0$, $q > 0$ devient
>
> $$\log(y) = \log(A) + x\log(q).$$
>
> Poser $z = \log(y)$ permet donc de chercher un ajustement affine $z = ax + b$. On retrouve ensuite $A = 10^b$ et $q = 10^a$. La transformation n'est pas définie pour $y \leq 0$. L'ajustement minimise les erreurs sur les logarithmes, pas directement sur les ordonnées originales : il faut contrôler le modèle reconstruit dans l'échelle initiale.

Les repères essentiels

Représenter deux variables par un nuage.

1. Identifie les deux variables et garde chaque paire de mesures associée.
2. Place x horizontalement et y verticalement, avec des axes nommés et gradués.
3. Décris la tendance, la courbure, les groupes et les points atypiques.
4. Compare des taux de variation si tu recherches un alignement exact.
5. Vérifie les données atypiques sans les supprimer uniquement pour améliorer l'apparence.

Construire un ajustement affine.

1. Observe le nuage et précise la méthode d'ajustement utilisée.
2. Calcule ou relève les coefficients a et b avec une précision suffisante.
3. Calcule les prévisions $\hat{y}_i$, puis les résidus $y_i - \hat{y}_i$.
4. Compare les carrés des résidus et leur organisation, pas seulement leur somme signée.
5. Présente les valeurs obtenues comme des prévisions dépendant du modèle.

Interpolation et extrapolation.

1. Relève l'intervalle observé, le codage de x et les unités.
2. Convertis la demande en abscisse et distingue interpolation et extrapolation.
3. Calcule une image ou résous l'équation correspondant à l'objectif.
4. Reconvertis le résultat en date ou en quantité et arrondis avec une précision justifiée.
5. Contrôle les limites physiques et indique la dépendance au modèle.

Reconnaître un modèle non linéaire.

1. Vérifie l'espacement des abscisses et observe la forme générale du nuage.
2. Calcule différences et, pour des valeurs non nulles adaptées au modèle, rapports successifs.
3. Propose une famille cohérente avec ces observations et le contexte.
4. Teste la formule sur tous les points puis examine les résidus.
5. Présente les valeurs futures comme conditionnelles au maintien de la règle.

Linéariser un modèle exponentiel.

1. Vérifie que toutes les ordonnées sont strictement positives et précise la base du logarithme.
2. Calcule $z = \log(y)$ et ajuste z en fonction de x.
3. Pour $z = ax + b$, reconstruis $y = 10^b(10^a)^x$.
4. Conserve les puissances exactes jusqu'aux calculs finaux et interprète le facteur q.

5. Contrôle les prévisions et les erreurs dans l'échelle initiale de y.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour les points $(0;1)$, $(1;3)$, $(2;4)$, une régression affine donne $\hat{y} = 1{,}5x + 7/6$. Les prévisions sont $7/6$, $8/3$ et $25/6$. Les résidus observation moins prévision sont donc $-1/6$, $1/3$ et $-1/6$.

Leur somme est nulle, mais les erreurs ne sont pas toutes nulles. La somme des carrés vaut $1/36 + 1/9 + 1/36 = 1/6$. Ce calcul rend visible une dispersion que la somme signée annulerait.

Le point moyen est $G(1;8/3)$. La droite passe bien par lui puisque $1{,}5 + 7/6 = 8/3$. Pour un affichage, on peut arrondir la constante à 1,1667 ; pour contrôler les résidus, garder $7/6$ évite les petites erreurs d'arrondi.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Une observation atypique peut être vraie. Avant d'utiliser le mot « erreur », distingue une erreur de saisie vérifiée d'une mesure inhabituelle mais réelle.