Arbres, probabilités totales et indépendance

Terminale STMG et STI2D · commun · Chapitre 05

Changer de population avec une probabilité conditionnelle

Définition · Comprendre la notion

Pour $P(A) > 0$, la probabilité de B sachant A est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

On restreint l'univers aux issues où A est réalisé. Dans un tableau d'effectifs, on divise l'effectif de l'intersection par celui de A. La formule donne aussi $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. Attention : $P_A(B)$ et $P_B(A)$ ne sont généralement pas égales. Lis la condition après « sachant » ou « parmi » ; elle fournit le dénominateur.

Construire et lire un arbre pondéré

Définition · Comprendre la notion

Un arbre décrit des choix ou des informations successives. Les probabilités issues d'un même nœud totalisent 1. Au deuxième niveau, les probabilités sont conditionnelles au chemin déjà suivi. Pour la probabilité d'un chemin complet, multiplie les probabilités de ses branches. Pour réunir plusieurs chemins disjoints, additionne leurs probabilités. L'arbre doit couvrir toutes les possibilités. Écris clairement les événements et leurs contraires ; ne recopie pas automatiquement les mêmes probabilités au second niveau si les étapes ne sont pas indépendantes.

Rassembler des cas avec les probabilités totales

Définition · Comprendre la notion

Si A et son contraire partagent l'univers, B peut survenir par deux chemins disjoints :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B).$$

Cette formule est une moyenne pondérée des probabilités dans les deux groupes. La moyenne simple n'est valable que si les groupes ont le même poids. La formule s'étend à trois groupes ou davantage, à condition qu'ils soient disjoints et couvrent tout l'univers. Chaque terme associe la proportion d'un groupe à la probabilité de B dans ce groupe.

Reconnaître l'indépendance

Définition · Comprendre la notion

Deux événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si $P(A) > 0$, cela équivaut à $P_A(B) = P(B)$: apprendre A ne change pas la probabilité de B. L'indépendance est symétrique. Elle peut être une hypothèse de modélisation ou une propriété à vérifier ; elle ne se déduit pas du simple fait que deux étapes sont successives. Des événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont pas indépendants : leur intersection a une probabilité nulle alors que leur produit est positif. L'indépendance permet de multiplier des probabilités non conditionnelles.

Retrouver une origine après observation

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Un arbre donne souvent la probabilité d'un résultat selon son origine. Après avoir observé le résultat B, la question peut demander l'origine A :
>
> $$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$
>
> Calcule d'abord l'intersection par le chemin A puis B ; calcule ensuite $P(B)$ avec tous les chemins qui donnent B. Cette démarche suffit, sans mémoriser une nouvelle formule. La fréquence initiale des origines compte beaucoup : même un résultat fréquent dans un petit groupe peut provenir surtout d'un groupe beaucoup plus grand.

Les repères essentiels

Changer de population avec une probabilité conditionnelle.

1. Repère le groupe qui suit « sachant » ou « parmi » : il fournit le dénominateur.
2. Identifie l'intersection entre ce groupe et la propriété recherchée.
3. Divise la probabilité ou l'effectif de l'intersection par celui du groupe connu.
4. Pour retrouver une intersection, multiplie la part du groupe par la probabilité conditionnelle.
5. Contrôle le sens de la condition en reformulant la réponse avec une phrase.

Construire et lire un arbre pondéré.

1. Nomme les événements et construis tous les chemins possibles.
2. Écris les probabilités conditionnelles au bon nœud.
3. Complète les branches d'un même nœud pour obtenir une somme de 1.
4. Multiplie les branches d'un chemin complet pour obtenir son intersection.
5. Additionne les chemins disjoints utiles et vérifie que tous les chemins totalisent 1.

Rassembler des cas avec les probabilités totales.

1. Découpe l'univers en groupes disjoints qui couvrent tous les cas.
2. Note la proportion de chaque groupe et le taux de l'événement dans ce groupe.
3. Multiplie ces deux quantités pour obtenir chaque contribution à l'univers.
4. Additionne les contributions ; si un taux est inconnu, résous l'équation correspondante.
5. Contrôle que les poids totalisent 1 et que le taux global est entre les taux des groupes.

Reconnaître l'indépendance.

1. Distingue une indépendance donnée comme hypothèse d'une indépendance à vérifier.
2. Calcule $P(A)P(B)$ et compare avec $P(A \cap B)$.
3. Ou, lorsque la condition a une probabilité positive, compare $P_A(B)$ à $P(B)$.
4. Conserve les valeurs exactes pour ne pas transformer un arrondi en preuve.
5. Explique la conclusion en termes d'effet de l'information, sans confondre avec l'incompatibilité.

Retrouver une origine après observation.

1. Reformule la question « parmi les B, quelle part est A ? ».
2. Calcule $P(A \cap B)$ par le chemin correspondant.

3. Calcule $P(B)$ en additionnant tous les chemins qui aboutissent à B.

4. Divise l'intersection par la probabilité du résultat observé.

5. Contrôle le sens avec un tableau ou une population de référence et arrondis à la fin.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

On connaît $P(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}2$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}5$. Les compléments sont $P(\overline{A}) = 0{,}4$, $P_A(\overline{B}) = 0{,}8$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}5$.

Les quatre chemins valent respectivement $0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$, $0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$, $0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}20$ et $0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}20$. Leur somme vaut 1.

Pour B, on réunit les chemins A puis B et non-A puis B :

$$\begin{aligned} P(B) &= 0{,}12 + 0{,}20 \\ &= 0{,}32. \end{aligned}$$

La valeur 0,2 de la branche issue de A ne représente donc pas la probabilité globale de B ; elle décrit B seulement parmi A.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

« B sachant A » ne signifie pas « A sachant B ». Souligne la condition dans la phrase avant d'écrire le dénominateur ; cela évite l'inversion la plus fréquente.