Loi binomiale et échantillonnage

Terminale STMG et STI2D · commun · Chapitre 06

Reconnaître une loi binomiale

Définition · Comprendre la notion

On répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de même probabilité de succès p. Le nombre X de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. X prend les valeurs entières de 0 à n. Le paramètre n compte les essais ; p est une probabilité, pas un effectif. Vérifie les trois conditions : nombre fixé d'essais, même paramètre, indépendance. Un prélèvement sans remise dans un petit lot ne vérifie généralement pas l'indépendance ni la constance du paramètre. Un modèle binomial peut parfois être une approximation, mais cela doit être annoncé et justifié.

Calculer une probabilité binomiale

Définition · Comprendre la notion

Pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Le coefficient $\binom{n}{k}$ compte les chemins de n essais contenant k succès. Le triangle de Pascal commence par 1 ; les bords valent 1 et chaque case intérieure est la somme des deux cases au-dessus. Cette règle exprime $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. La ligne n=4 est 1, 4, 6, 4, 1. Pour zéro succès, $P(X = 0) = (1-p)^n$; pour tous les succès, $P(X = n) = p^n$. On peut utiliser une calculatrice pour les autres valeurs.

Au plus, au moins et entre deux valeurs

Définition · Comprendre la notion

Pour une variable entière X, « au plus k » signifie $X \leq k$ et « au moins k » signifie $X \geq k$. Une probabilité cumulée additionne les probabilités des valeurs acceptées. Son contraire fournit $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$. Pour $a \leq b$, $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$. Le décalage d'une unité est essentiel. Sur une calculatrice, distingue la fonction qui calcule exactement k succès de celle qui cumule jusqu'à k. Contrôle toujours le sens de l'événement avant d'utiliser le résultat.

Interpréter le nombre moyen de succès

Définition · Comprendre la notion

Pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, l'espérance vaut $E(X) = np$. Ce résultat est admis dans l'enseignement commun technologique. On peut le comprendre en décomposant X en n indicatrices de succès, chacune de moyenne p : les contributions moyennes s'additionnent. Le nombre moyen de succès n'est pas nécessairement entier et ne prédit pas un résultat exact. La fréquence moyenne X/n a pour espérance p. Lorsque l'on compare deux campagnes, distingue le nombre moyen de succès et le taux de succès.

Relier loi théorique et fréquences simulées

> **Définition · Comprendre la notion**
>
> Pour simuler une variable binomiale, répète n tirages de Bernoulli indépendants et compte les succès. Pour étudier sa loi, recommence N fois et compte les fréquences des valeurs 0 à n. Le diagramme des fréquences ressemble progressivement à celui de la loi, avec des écarts aléatoires. La moyenne des nombres de succès peut être comparée à np ; les fréquences X/n peuvent être étudiées pour observer leur dispersion. En première technologique, la simulation sert aussi à comparer la dispersion des fréquences pour différentes tailles : elle est de l'ordre de $1/\sqrt{n}$ à paramètre fixé. Diviser cette dispersion par deux demande donc approximativement de multiplier n par quatre ; ce constat ne constitue pas une garantie sur chaque échantillon.

Les repères essentiels

Reconnaître une loi binomiale.

1. Définis le succès et la variable X comme nombre de succès.
2. Vérifie que le nombre n d'essais est fixé.
3. Justifie l'identité du paramètre p et l'indépendance.
4. Écris $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et les valeurs possibles.
5. Compare ces valeurs avec les contraintes du contexte pour détecter un modèle incompatible.

Calculer une probabilité binomiale.

1. Vérifie le modèle binomial et relève n, p et le nombre exact k de succès.
2. Calcule le nombre de placements $\binom{n}{k}$.
3. Écris le poids d'un chemin : k facteurs p et n-k facteurs $1 - p$.
4. Multiplie le poids par le nombre de placements et conserve les parenthèses.
5. Contrôle les cas extrêmes et la cohérence avec une probabilité comprise entre 0 et 1.

Au plus, au moins et entre deux valeurs.

1. Écris l'événement avec un signe exact, large ou strict.
2. Liste les entiers acceptés pour vérifier les bornes.
3. Choisis une somme directe ou un complément selon le nombre de termes.
4. Pour un intervalle inclusif, utilise les cumuls jusqu'à b et jusqu'à a-1.
5. Contrôle le mode de calcul de l'outil et compare avec un cas simple si possible.

Interpréter le nombre moyen de succès.

1. Identifie n et p après avoir vérifié le modèle et le succès choisi.
2. Calcule $E(X) = np$ avec p sous forme décimale.
3. Annonce le résultat comme un nombre moyen de succès par série de n essais.
4. Pour comparer des campagnes, distingue le nombre moyen np et le taux p.
5. Ne déduis pas une garantie ou une probabilité de seuil du seul calcul de l'espérance.

Relier loi théorique et fréquences simulées.

1. Vérifie le paramètre p, le nombre n d'essais et le codage du succès.
2. Initialise le compteur à chaque nouvelle série, puis accumule ses n succès.
3. Répète la série N fois pour observer la loi ou une moyenne empirique.

4. Distingue nombres de succès et fréquences avant de comparer les dispersions.
5. Interprète les écarts comme des résultats à examiner, sans imposer l'égalité exacte à la théorie.

Un exemple pour se repérer

Exemple · Exemple commenté

Pour $X \sim \mathcal{B}(3; 0{,}5)$, les probabilités des valeurs 0, 1, 2, 3 sont respectivement $1/8$, $3/8$, $3/8$, $1/8$.

Au moins un succès signifie X égal à 1, 2 ou 3. Le complément est X égal à zéro :

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - 1/8 \\ &= 7/8. \end{aligned}$$

Pour au moins deux succès, on garde seulement 2 et 3 :

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 3/8 + 1/8 \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

Le calcul complémentaire retire les cas 0 et 1 : $1 - (1/8 + 3/8) = 1/2$. Retirer le cumul jusqu'à 2 aurait éliminé le cas X égal à 2 et calculé seulement $P(X \geq 3)$.

Les erreurs à éviter

Attention · Comprendre une erreur fréquente

Le seul fait de répéter un contrôle ne suffit pas. Vérifie si la probabilité reste la même après chaque résultat et si le nombre d'essais a été fixé.