Produit scalaire dans l'espace

Terminale spécialité · Chapitre 03

Les repères essentiels

Méthode · Les outils et leurs conditions

- Base orthonormée : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Deux vecteurs non nuls : $\cos\theta = (\vec{u} \cdot \vec{v}) / (\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|)$.
- Orthogonalité de vecteurs : produit scalaire nul. Pour des droites perpendiculaires, vérifier aussi l'intersection.
- Normale à un plan : vecteur non nul orthogonal à deux directions non colinéaires du plan.
- Projeté : appartenance à la droite ou au plan et perpendicularité du déplacement ; la distance cherchée est la norme de ce déplacement.
- Volume d'une pyramide ou d'un tétraèdre : $\frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{distance du sommet au plan de base}$.

Avant une formule, nomme la grandeur cherchée et son unité. Après le calcul, vérifie les conditions et le sens du résultat : un produit scalaire peut être négatif, une distance ne le peut pas.

Un exemple pour se repérer

Exemple

$A(1, 2, 3)$ et $B(4, -1, 7)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(4-1)^2 + (-1-2)^2 + (7-3)^2} \\ &= \sqrt{9 + 9 + 16} \\ &= \sqrt{34} \\ &\approx 5{,}83 \end{aligned}$$

Les erreurs à éviter

Attention · Le produit scalaire n'est PAS un vecteur

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un **nombre réel**, pas un vecteur. On ne peut pas écrire $\left\|\vec{u} \cdot \vec{v}\right\|$ (la norme d'un nombre n'a pas de sens en tant que norme de vecteur). On ne peut pas non plus additionner un produit scalaire et un vecteur.

Autre piège : $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ n'a **aucun sens**, car $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un nombre et on ne peut pas faire le produit scalaire d'un nombre avec un vecteur. En revanche, $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ (sans le point) a un sens : c'est le vecteur $\vec{w}$ multiplié par le scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.