Suites, récurrences et limites

Terminale spécialité · Chapitre 05

Définir et calculer une suite

Explicite : $u_n = f(n)$. Récurrente : une valeur initiale et une règle de passage. Suite arithmétique : $u_n = u_p + (n-p)r$. Suite géométrique : $u_n = u_p q^{n-p}$, pour $n \geq p$. Repère toujours le premier rang.

Démontrer par récurrence

Annonce $P(n)$ et le premier rang n_0. Initialisation : vérifie $P(n_0)$. Hérédité : fixe $n \geq n_0$, suppose $P(n)$ et démontre $P(n+1)$. Conclus que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Limites à connaître

Pour $\alpha > 0$, $1/n^\alpha \to 0$. Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$; si $q > 1$, $q^n \to +\infty$; si $q = 1$, $q^n = 1$. Pour $q \leq -1$, les signes alternent et q^n n'a pas de limite. Une suite convergente est bornée ; la réciproque est fausse.

Comparer et encadrer

Gendarmes : si $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang et $a_n, b_n \to \ell$, alors $u_n \to \ell$. Si $u_n \geq a_n$ et $a_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$. Les inégalités larges passent à la limite lorsque les limites sont finies.

Convergence monotone

Une suite croissante et majorée converge. Une suite décroissante et minorée converge. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. Pour $u_{n+1} = f(u_n)$, si la convergence vers ℓ est établie et f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$.

Exemple et contrôle

Pour $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$, une récurrence donne $0 \leq u_n \leq 6$. Comme $u_{n+1} - u_n = 3 - u_n/2 \geq 0$, la suite croît et converge. Sa limite vérifie $\ell = \ell/2 + 3$, donc $\ell = 6$.

Erreurs à éviter

Résoudre une équation de point fixe ne prouve pas la convergence. Ne confonds pas majorant et limite. Les formes $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $0/0$, ∞/∞ demandent une transformation. Un calcul de quelques termes est une conjecture, pas une preuve.