Limites de fonctions et asymptotes

Terminale spécialité · Chapitre 06

Limites et domaine

Étudie la limite dans le domaine de définition, à gauche et à droite si nécessaire. En un point, une limite bilatérale existe seulement si les deux limites latérales coïncident. Le signe du dénominateur est décisif près d'une valeur interdite.

Les asymptotes

Si $f(x) \to \ell$ en $+\infty$ ou $-\infty$, la droite $y = \ell$ est une asymptote horizontale du côté étudié. Si $f(x) \to \pm\infty$ lorsque $x \to a$ d'un côté, $x = a$ est une asymptote verticale. Complément : $f(x) - (mx + p) \to 0$ caractérise une asymptote oblique, pour $m \neq 0$.

Lever une indétermination

Les formes $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$ et $0 \times \infty$ ne donnent pas la limite. Factorise, mets au même dénominateur ou utilise le conjugué. Pour un quotient de polynômes en l'infini, factorise par les termes de plus haut degré.

Limites de référence

Pour tout entier $n \geq 1$, $x^n \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ et $1/x^n \to 0$. En 0^+, $1/x \to +\infty$; en 0^-, $1/x \to -\infty$. Pour $\alpha > 0$, $e^x/x^\alpha \to +\infty$ et $\ln(x)/x^\alpha \to 0$ en $+\infty$.

Composition et comparaison

Si $u(x) \to a$ et $f(t) \to L$ lorsque $t \to a$ par les valeurs prises par u, alors $f(u(x)) \to L$. Gendarmes : deux fonctions qui encadrent f et tendent vers le même réel imposent la même limite à f.

Exemple

Pour $x \neq 1$, $(x^2 - 1)/(x - 1) = x + 1$. La limite en 1 vaut donc 2, malgré la forme initiale $0/0$. Autre exemple : $(3x^2 + 1)/(x^2 - 2) = (3 + 1/x^2)/(1 - 2/x^2) \to 3$ en $+\infty$.

Erreurs à éviter

Une asymptote peut couper la courbe. Une limite en un point ne donne pas nécessairement la valeur de la fonction en ce point. Toujours préciser le lieu et le côté de la limite.