Dérivée seconde, convexité et points d'inflexion

Terminale spécialité · Chapitre 08

Dérivée seconde

f'' est la dérivée de f'. Son signe renseigne sur les variations de la pente. Sur un intervalle où f est deux fois dérivable, $f'' \geq 0$ signifie que f' croît et que f est convexe. Si $f'' \leq 0$, f est concave.

Courbe, tangentes et cordes

Pour une fonction convexe dérivable, la courbe est au-dessus de chaque tangente et en dessous des cordes reliant deux points de la courbe sur l'intervalle. Pour une fonction concave, ces positions sont inversées.

Point d'inflexion

Un point d'inflexion correspond à un changement de convexité. Si f'' est continue et change de signe en a, alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion. La seule égalité $f''(a) = 0$ ne suffit pas.

Méthode

Précise le domaine, calcule f' puis f'', factorise si utile et étudie le signe de f''. Déduis les intervalles de convexité et de concavité. Pour chaque changement, calcule l'ordonnée $f(a)$.

Exemples

Pour $f(x) = x^3$, $f''(x) = 6x$: concave sur $]-\infty, 0]$, convexe sur $[0, +\infty[$ et point d'inflexion $(0, 0)$.
Pour $g(x) = x^4$, $g''(x) = 12x^2$ ne change pas de signe : pas d'inflexion en 0.

Une inégalité utile

La fonction exponentielle est convexe car sa dérivée seconde est $e^x > 0$. Sa tangente en 0 a pour équation $y = 1 + x$; donc $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x.

Erreurs à éviter

Convexe ne signifie ni positive ni croissante. Le signe de f' donne les variations de f ; le signe de f'' donne sa convexité.