# Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Terminale spécialité · Chapitre 09

## Continuité

$f$ est continue en $a$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, dans son domaine. Les fonctions usuelles sont continues sur leurs domaines ; sommes, produits, quotients à dénominateur non nul et compositions conservent la continuité. Dérivable implique continue, mais pas l'inverse.

## Théorème des valeurs intermédiaires

Si $f$ est continue sur $[a, b]$, toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte. En particulier, si $f(a)f(b) < 0$, il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f(c) = 0$. Le TVI garantit une existence, pas une unicité.

## Unicité

Si, de plus, $f$ est strictement monotone sur $[a, b]$, chaque valeur entre $f(a)$ et $f(b)$ a un unique antécédent. Rédige séparément : continuité, encadrement de la valeur cherchée, existence, puis stricte monotonie et unicité.

## Dichotomie

Pour une fonction continue et un zéro encadré par deux valeurs de signes opposés, teste $m = (a + b)/2$. Si $f(m) = 0$, arrête. Sinon, garde la moitié dont les bornes ont des images de signes opposés. Après $n$ divisions, la largeur vaut $(b - a)/2^n$.

## Suites et continuité

Si $u_n \to \ell$ et $f$ est continue en $\ell$, alors $f(u_n) \to f(\ell)$. Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et la convergence est déjà prouvée, la limite satisfait $\ell = f(\ell)$.

## Exemple

$f(x) = x^3 + x - 1$ est continue sur $[0, 1]$, avec $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. Le TVI donne un zéro dans $]0, 1[$. Comme $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, il est unique. Une dichotomie permet ensuite de l'encadrer.

## Erreurs à éviter

Un changement de signe ne suffit pas sans continuité sur tout l'intervalle : $1/x$ n'a pas de zéro. Un tracé ou une valeur approchée ne démontre ni l'existence ni l'unicité.