Fonction exponentielle

Terminale spécialité · Chapitre 10

Définition et identités

La fonction exponentielle est l'unique fonction vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. Pour tous réels a, b, $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{a-b} = e^a / e^b$, $e^{-a} = 1/e^a$. Elle est strictement positive.

Signe et variations

$(e^x)' = e^x > 0$: l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$. De plus, $e^x > 1 \iff x > 0$.

Limites

$e^x \to 0$ en $-\infty$ et $e^x \to +\infty$ en $+\infty$. Pour tout entier $n \geq 1$, $e^x / x^n \to +\infty$ et $x^n e^{-x} \to 0$ en $+\infty$. Au voisinage de 0, $(e^h - 1)/h \to 1$.

Dériver et modéliser

Pour u dérivable, $(e^u)' = u' e^u$. Pour $a > 0$, $a^x = e^{x \ln a}$. Les solutions de $y' = ky$ sont $y(x) = Ce^{kx}$. Une condition initiale détermine C.

Exemple

Pour $f(x) = xe^{-2x}$, le produit et la chaîne donnent $f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = (1 - 2x)e^{-2x}$. Le facteur exponentiel est positif : le signe dépend seulement de $1 - 2x$.

Erreurs à éviter

e^{a+b} n'est pas $e^a + e^b$. e^{x^2} n'est pas $(e^x)^2 = e^{2x}$. Une exponentielle ne vaut jamais zéro ; on peut donc diviser par elle. Toujours lever les indéterminations avant de conclure une limite.