Logarithme népérien

Terminale spécialité · Chapitre 11

Définition et domaine

Pour $x > 0$, $\ln x$ est l'unique réel y tel que $e^y = x$. Ainsi $\ln(e^y) = y$ pour tout réel y, et $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$. $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.

Transformer

Pour $a, b > 0$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ et $\ln(1/a) = -\ln a$. Pour $a > 0$ et r réel, $\ln(a^r) = r \ln a$. Il n'existe pas de règle analogue pour $\ln(a + b)$.

Dérivée, signe et variations

$(\ln x)' = 1/x > 0$ sur $]0, +\infty[$: $\ln$ est strictement croissante. Elle est négative sur $]0, 1[$, nulle en 1, positive sur $]1, +\infty[$. Pour $u > 0$ dérivable, $(\ln u)' = u'/u$.

Limites

$\ln x \to -\infty$ en 0^+ et $\ln x \to +\infty$ en $+\infty$. Pour $\alpha > 0$, $\ln x / x^\alpha \to 0$ en $+\infty$, et $x^\alpha \ln x \to 0$ en 0^+. $\ln(1 + h)/h \to 1$ quand $h \to 0$.

Résoudre

Commence par imposer la stricte positivité de chaque argument. Pour $u, v > 0$, $\ln u = \ln v \iff u = v$ et $\ln u < \ln v \iff u < v$. L'équation $\ln u = a$ équivaut à $u = e^a$, dans le domaine autorisé.

Exemple

$\ln(x - 1) = \ln(5 - x)$ exige $1 < x < 5$. Dans ce domaine, $x - 1 = 5 - x$, donc $x = 3$, qui respecte les contraintes. Pour $g(x) = \ln(3x - 1)$, $g'(x) = 3/(3x - 1)$ sur $]1/3, +\infty[$.

Erreurs à éviter

$\ln(x^2) = 2 \ln x$ suppose $x > 0$. Pour $x \neq 0$, on écrit $\ln(x^2) = 2 \ln |x|$. Le logarithme décimal est $\log_{10}(x) = \ln x / \ln 10$, pour $x > 0$. Ne supprime jamais les conditions de domaine.