Fonctions trigonométriques

Terminale spécialité · Chapitre 12

Cercle et symétries

Les angles sont en radians. Sur le cercle unité, le point d'angle x a pour coordonnées $(\cos x, \sin x)$. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Cosinus est pair, sinus impair ; les deux fonctions sont 2π-périodiques et prennent leurs valeurs dans $[-1, 1]$.

Valeurs et addition

Pour les angles $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$, les sinus valent $0, 1/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, 1$; les cosinus sont ces valeurs dans l'ordre inverse. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Dériver

$(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$. Pour u dérivable, $(\sin u)' = u' \cos u$ et $(\cos u)' = -u' \sin u$. Une primitive de $\cos x$ est $\sin x$; une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$.

Résoudre dans les réels

$\cos x = \cos a \iff x = 2k\pi \pm a$, avec $k \in \mathbb{Z}$. $\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$. Pour un intervalle imposé, garde seulement les valeurs qui y appartiennent. Une valeur hors de $[-1, 1]$ ne peut être un sinus ou un cosinus réel.

Période et amplitude

Pour $A \neq 0$ et $\omega \neq 0$, $A \sin(\omega x + \varphi) + b$ a pour amplitude $|A|$, pour période $2\pi/|\omega|$ et pour valeurs extrêmes $b - |A|$ et $b + |A|$. Le déphasage horizontal vaut $-\varphi/\omega$.

Exemple

$f(x) = 3\sin(2x) - 1$ a pour période π, minimum -4 et maximum 2. Sa dérivée est $6\cos(2x)$. Sur $[0, 2\pi[$, $\cos x = 1/2$ donne $x = \pi/3$ ou $x = 5\pi/3$.

Erreurs à éviter

Ne confonds pas degrés et radians. Garde le signe moins dans la dérivée du cosinus. N'oublie pas la seconde famille de solutions ni le filtrage à l'intervalle demandé.