Primitives et intégration

Terminale spécialité · Chapitre 13

Primitives sur un intervalle

F est une primitive de f si $F' = f$. Deux primitives sur un même intervalle diffèrent d'une constante. Pour un entier $n \geq 0$, une primitive de x^n est $x^{n+1}/(n+1)$. Une primitive de $1/x$ est $\ln|x|$ sur un intervalle ne contenant pas 0.

Formes à reconnaître

Une primitive de $u'e^u$ est e^u. Pour $u > 0$, une primitive de u'/u est $\ln u$. Une primitive de $u'u^n$ est $u^{n+1}/(n+1)$ pour $n \geq 0$. Vérifie toute proposition en la dérivant.

Calculer une intégrale

Si f est continue sur $[a,b]$ et F une primitive, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Linéarité : l'intégrale d'une combinaison linéaire est la même combinaison des intégrales. Chasles : $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$.

Aires, comparaison, valeur moyenne

Pour $a < b$, l'aire entre la courbe et l'axe vaut $\int_a^b |f(x)|\,dx$. Si $f \leq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. La valeur moyenne est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Entre deux courbes avec $f \leq g$, l'aire vaut $\int_a^b (g-f)$.

Intégration par parties

Pour u, v de classe C^1 sur $[a,b]$, $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$. Choisis la fonction à dériver pour simplifier l'intégrale restante.

Exemple

$\int_0^2 x\,dx = [x^2/2]_0^2 = 2$. Sur $[0,3]$, la valeur moyenne de x^2 est $\frac{1}{3}[x^3/3]_0^3 = 3$. Pour f continue, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ a pour dérivée $f(x)$.

Erreurs à éviter

Une intégrale peut être négative, une aire ne l'est pas. N'oublie pas la borne inférieure dans $F(b) - F(a)$. Dans une primitive, conserve la constante ; dans une intégrale définie, elle s'élimine.