Équations différentielles

Terminale spécialité · Chapitre 14

Ce que l'on cherche

Une équation différentielle relie une fonction inconnue à sa dérivée. Une solution doit vérifier l'égalité en tout point de l'intervalle étudié. Une condition initiale impose une valeur, par exemple $y(x_0) = y_0$.

Les trois modèles essentiels

$y' = f$: les solutions sont les primitives de f. $y' = ay$: $y(x) = Ce^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$. $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$: $y(x) = Ce^{ax} - b/a$. Si $a = 0$, on résout $y' = b$, donc $y(x) = bx + C$.

Utiliser une condition initiale

Pour $y' = ay$ et $y(x_0) = y_0$, $y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$. Pour $y' = ay + b$, pose l'équilibre $L = -b/a$; la solution est $y(x) = L + (y_0 - L)e^{a(x-x_0)}$, pour $a \neq 0$.

Interpréter l'équilibre

Pour $a < 0$, toute solution de $y' = ay + b$ tend vers $L = -b/a$ en $+\infty$. Le signe de $y - L$ reste celui de la valeur initiale moins L. Pour $a > 0$, une solution non constante s'éloigne de l'équilibre.

Vérifier ou construire

Calcule la dérivée, remplace dans l'équation, puis vérifie séparément la condition initiale. Si une solution particulière de $y' = ay + g(x)$ est connue, toutes les solutions s'obtiennent en lui ajoutant Ce^{ax}.

Exemple

$y' = -2y + 6$ et $y(0) = 7$. L'équilibre est 3, donc $y(x) = 3 + Ce^{-2x}$. La condition donne $C = 4$: $y(x) = 3 + 4e^{-2x}$. Sa dérivée vaut $-8e^{-2x}$, bien égale à $-2y + 6$. La limite est 3.

Euler et précautions

Pour $y' = F(x, y)$, le pas d'Euler est $x_{n+1} = x_n + h$, $y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n)$. C'est une approximation. Ne confonds pas une solution unique avec toute la famille ; ne divise jamais par a sans traiter $a = 0$.