Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Terminale spécialité · Chapitre 16

Les repères essentiels

Définition · Vérifier le modèle

n essais fixés ; deux catégories ; même probabilité p de succès ; essais indépendants. X compte les succès et suit $\mathcal{B}(n, p)$.

Méthode · Une probabilité ponctuelle

Pour $0 < p < 1$ et $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$P(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{positions}} \underbrace{p^k}_{\text{succès}} \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{échecs}}.$$

Pour $p = 0$, $X = 0$; pour $p = 1$, $X = n$ (avec probabilité 1).

Méthode · Traduire avant de calculer

$$P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1),$$
$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a-1),$$
$$P(X \geqslant 1) = 1 - (1-p)^n.$$

Les bornes sont entières. Pour un seuil minimal, vérifier qu'il convient et que le précédent ne convient pas, avec une justification de monotonie.

Propriété · Centre et dispersion

$$E(X) = np, \qquad V(X) = np(1-p), \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Une moyenne n'est pas un résultat promis. Une fréquence simulée estime une probabilité et peut varier d'une série à l'autre.

Un exemple pour se repérer

Exemple

On réalise des lancers tous indépendants : 30 le matin ($X \sim \mathcal{B}(30\,;\,0{,}5)$) et 20 lancers l'après-midi ($Y \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}5)$). Le total de Piles $X + Y \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}5)$.

Les erreurs à éviter

Attention · L'erreur classique : $P(X \geqslant k) \neq 1 - P(X \leqslant k)$

$P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant \mathbf{k-1})$, pas $1 - P(X \leqslant k)$! En effet, $P(X \leqslant k)$ **contient** le terme $P(X = k)$. Si on écrit $1 - P(X \leqslant k)$, on obtient $P(X \geqslant k+1) = P(X > k)$.

Règle : pour le « au moins », retrancher ce qui est « strictement en dessous ».