Somme de variables aléatoires et loi des grands nombres

Terminale spécialité · Chapitre 17

Les repères essentiels

Propriété · Somme : deux règles distinctes

Dans le cadre de variance finie,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

Si X, Y sont indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$. L'indépendance suffit ; elle n'est pas nécessaire dans tous les exemples.

Méthode · Un échantillon de taille n

$X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de même loi, $n \geqslant 1$, espérance μ et variance finie σ^2. Posons $S_n = \sum X_i$ et $M_n = S_n/n$.

$$E(S_n) = n\mu,$$
$$V(S_n) = n\sigma^2,$$
$$E(M_n) = \mu,$$
$$V(M_n) = \sigma^2/n.$$

L'écart-type de la moyenne vaut $\sigma/\sqrt{n}$; il ne garantit pas l'erreur d'une observation particulière.

Théorème · Concentration : précision et risque

Pour $\delta > 0$, Tchebychev donne

$$P(|X - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Appliquée à M_n :

$$P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \min\left(1, \frac{\sigma^2}{n\delta^2}\right).$$

Pour un risque au plus $\alpha \in]0;1[$, $n \geqslant \sigma^2/(\alpha\delta^2)$ est une condition suffisante.

Définition · Loi des grands nombres

Pour toute marge **fixée** $\delta > 0$, le risque $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta)$ tend vers zéro. La moyenne observée n'est pas nécessairement plus proche à chaque étape. Un biais du protocole ne disparaît pas par répétition.

Un exemple pour se repérer

Exemple

Un dé équilibré : $E(X) = 3{,}5$. $P(X \geqslant 5) \leqslant \frac{3{,}5}{5} = 0{,}7$. (Valeur exacte : $\frac{2}{6} \approx 0{,}33$.)

L'inégalité est **grossière** mais **universelle** : elle ne dépend que de $E(X)$.

Les erreurs à éviter

> **Attention · L'espérance est linéaire, la variance non !**
>
> $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ est **toujours** vrai, même si X et Y ne sont pas indépendantes.
>
> En revanche, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ est **garanti lorsque X et Y sont indépendantes**, mais cette condition est suffisante, pas nécessaire.