

---

## Sujet d'entraînement N° 2

Un cran plus difficile, surtout en analyse et en probabilités

---

Voici le deuxième sujet d'entraînement de la série, toujours maison et sans caractère officiel. Il reprend la même structure que le premier, mais je l'ai volontairement durci, en particulier sur les équations différentielles et les probabilités.

J'ai aussi rendu les énoncés plus ouverts : je ne donne pas d'indice, c'est à vous de trouver la bonne méthode, d'introduire vous-mêmes les suites auxiliaires et de repérer les points fixes. C'est plus exigeant, mais c'est exactement ce qui fait progresser.

Comme pour le sujet 1, le plus efficace est de le faire au calme, calculatrice autorisée, sans regarder le corrigé. Comptez environ quatre heures d'une traite, mais les sept exercices restent indépendants. Quand une question attend une vraie démonstration, je l'ai signalée par la mention **(à démontrer)**.

Le corrigé entièrement détaillé est disponible à part sur [fiches-maths.com](http://fiches-maths.com). Bon travail, et accrochez-vous sur les derniers exercices.

### Au programme de ce sujet

EXERCICE I	Suites, encadrements et convergence
EXERCICE II	Fonction exponentielle, convexité et continuité
EXERCICE III	Équations différentielles et suite récurrente
EXERCICE IV	Calcul intégral et suite d'intégrales
EXERCICE V	Géométrie de l'espace, plan et sphère
EXERCICE VI	Probabilités, modèle d'évolution à deux états
EXERCICE VII	Loi binomiale, valeur la plus probable et concentration

**Exercice I** Suites, encadrements et convergence

ENVIRON 3 POINTS

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .

1. Démontrer que pour tout entier  $k \geq 1$ ,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$ .

4. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln n}$ .

5. On pose, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n = H_n - \ln(n)$ . Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

6. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est minorée, puis qu'elle converge. (**à démontrer**)

**Exercice II** *Fonction exponentielle, convexité et continuité*

ENVIRON 3 POINTS

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^2 e^{-x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . Préciser l'asymptote correspondante.
2. Calculer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variations complet de  $f$ .
3. Calculer  $f''(x)$ . Étudier la convexité de  $f$  et déterminer les abscisses des points d'inflexion de  $\mathcal{C}$ .
4. Discuter, suivant les valeurs du réel  $c$ , le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = c$ .
5. Calculer  $\int_0^2 f(x) dx$  et interpréter géométriquement ce résultat.

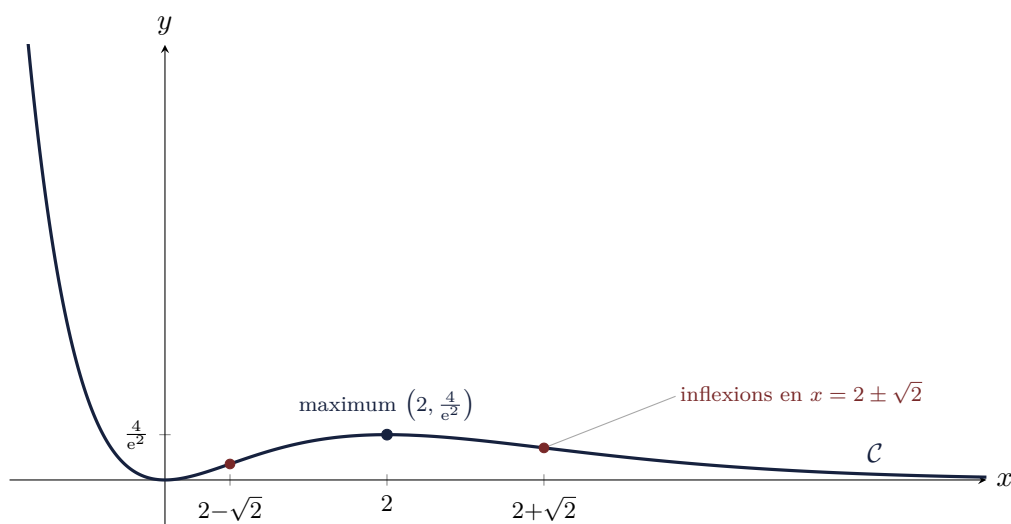


FIGURE 1. Courbe de  $f(x) = x^2 e^{-x}$ .

**Exercice III** *Équations différentielles et suite récurrente*

ENVIRON 3 POINTS

On étudie la quantité de médicament, en milligrammes, présente dans le sang d'un patient. Entre deux injections, cette quantité, notée  $q(t)$  où  $t$  désigne le temps en heures, vérifie l'équation différentielle

$$(E) \quad q'(t) = -k q(t), \quad k > 0.$$

**Partie A. Élimination du médicament.**

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. On appelle *demi-vie* la durée  $T$  au bout de laquelle la quantité de médicament est divisée par deux, c'est-à-dire telle que  $q(t+T) = \frac{1}{2}q(t)$  pour tout  $t$ . Exprimer  $T$  en fonction de  $k$ , puis déterminer  $k$  sachant que la demi-vie vaut exactement 1 heure.

**Partie B. Injections répétées.**

On administre 10 mg du médicament à l'instant  $t = 0$ , puis de nouveau 10 mg à chaque heure. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  la quantité de médicament présente dans le sang juste après la  $n$ -ième injection (celle de l'instant  $t = 0$  étant comptée comme la 0-ième). Ainsi  $u_0 = 10$ .

1. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
2. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
3. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n < 20$ .
4. Étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
5. Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite. (**à démontrer**)
6. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
7. Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n \geq 19,9$ .

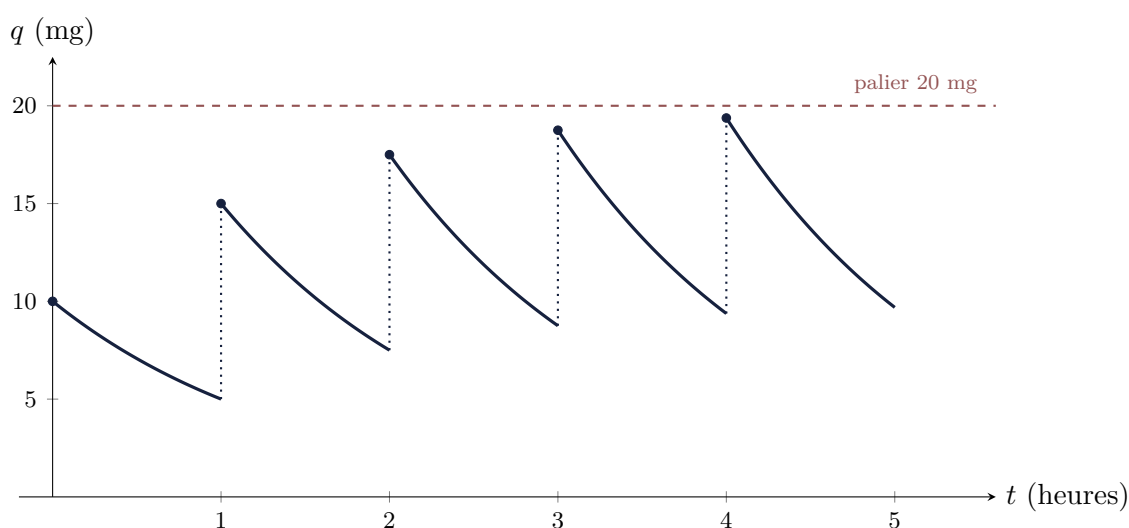


FIGURE 2. Quantité  $q(t)$  : décroissance entre les injections, sauts de 10 mg à chaque heure.

**Exercice IV** *Calcul intégral et suite d'intégrales*

ENVIRON 3 POINTS

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose

$$K_n = \int_1^e (\ln x)^n dx.$$

1. Calculer  $K_0$  et  $K_1$ .
2. Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$K_n = e - n K_{n-1}.$$

**(à démontrer)**

3. En déduire les valeurs de  $K_2$  et  $K_3$ .
4. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $K_n \geq 0$ .
5. Étudier le sens de variation de la suite  $(K_n)$ .
6. Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $0 \leq K_{n-1} \leq \frac{e}{n}$ , puis en déduire la limite de la suite  $(K_n)$ .
7. Déterminer la limite de la suite  $(n K_{n-1})$ .

**Exercice V** Géométrie de l'espace, plan et sphère

ENVIRON 3 POINTS

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points

$$O(0, 0, 0), \quad A(2, 0, 0), \quad B(0, 2, 0), \quad C(0, 0, 4).$$

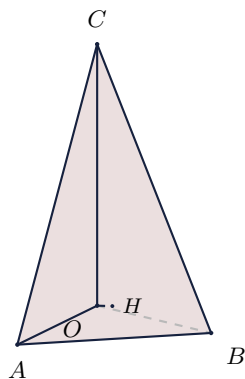


FIGURE 3. Le tétraèdre  $OABC$ , le triangle  $ABC$  et le projeté orthogonal  $H$  de  $O$ .

**Partie A. Le plan  $(ABC)$ .**

1. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
2. Calculer la distance du point  $O$  au plan  $(ABC)$ .
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal  $H$  de  $O$  sur le plan  $(ABC)$ .

**Partie B. Volume et sphère.**

4. Calculer le volume du tétraèdre  $OABC$ .
5. Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .
6. Déterminer une équation de la sphère circonscrite au tétraèdre  $OABC$ , c'est-à-dire passant par les quatre points  $O, A, B$  et  $C$ . Préciser les coordonnées de son centre et la valeur de son rayon.

**Exercice VI** Probabilités, modèle d'évolution à deux états

ENVIRON 3 POINTS

Chaque jour, un serveur informatique est soit *disponible* (état  $A$ ), soit *en panne* (état  $B$ ). On constate que :

- s'il est disponible un jour donné, il l'est encore le lendemain avec probabilité 0,7 ;
- s'il est en panne un jour donné, il redevient disponible le lendemain avec probabilité 0,4.

Le jour 0, le serveur est disponible. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $a_n$  la probabilité que le serveur soit disponible le jour  $n$ . Ainsi  $a_0 = 1$ .

1. Calculer  $a_1$  et  $a_2$ .
2. Exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ .
3. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n > \frac{4}{7}$ .
4. Étudier le sens de variation de la suite  $(a_n)$ .
5. Démontrer que la suite  $(a_n)$  converge et déterminer sa limite. (**à démontrer**)
6. Exprimer  $a_n$  en fonction de  $n$ .
7. Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $\left|a_n - \frac{4}{7}\right| \leq 10^{-2}$ .

**Exercice VII** *Loi binomiale, valeur la plus probable et concentration*

ENVIRON 2 POINTS

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , où  $n \geq 1$  est un entier et  $p \in ]0; 1[$ .

**Partie A. Étude générale.**

1. Rappeler, pour  $0 \leq k \leq n$ , l'expression de  $P(X = k)$ , ainsi que celles de  $E(X)$  et de  $V(X)$ .
2. Démontrer que pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n - 1$ ,

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{(n - k)p}{(k + 1)(1 - p)}.$$

3. En déduire, en fonction de  $n$  et  $p$ , l'ensemble des entiers  $k$  pour lesquels  $P(X = k + 1) > P(X = k)$ .

**Partie B. Cas  $n = 10$  et  $p = 0,3$ .**

4. Déterminer la valeur de  $k$  pour laquelle  $P(X = k)$  est maximale (valeur la plus probable de  $X$ ).
5. Calculer  $E(X)$  et l'écart-type  $\sigma(X)$ .
6. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer  $P(|X - 3| \geq 3)$ . Que peut-on en déduire pour  $P(X \geq 6)$  ?