
Sujet d'entraînement N° 1

Un sujet complet pour réviser tout le programme

Ce sujet n'a rien d'officiel : je l'ai écrit moi-même pour fiches-maths.com. L'idée est de vous proposer un sujet complet, d'un bon niveau, qui passe en revue l'ensemble du programme de terminale.

Le mieux est de le traiter dans les conditions d'une vraie épreuve : au calme, la calculatrice à côté, sans le corrigé sous les yeux, et en cherchant sérieusement chaque question avant de regarder la solution. Comptez environ quatre heures si vous le faites d'une traite, mais les huit exercices sont indépendants : rien ne vous empêche de piocher seulement celui qui vous intéresse.

Un dernier conseil : soignez votre rédaction, justifiez chaque étape et encadrez vos résultats. C'est au moins la moitié du travail le jour de l'épreuve. Quand une question attend une vraie démonstration, je l'ai signalée par la mention (**à démontrer**).

Le corrigé entièrement détaillé est disponible à part sur fiches-maths.com. Bon courage, et surtout : prenez le temps de chercher.

Au programme de ce sujet

| | |
|---------------|---|
| EXERCICE I | Suites, récurrence et convergence |
| EXERCICE II | Fonction logarithme, dérivation, convexité et continuité |
| EXERCICE III | Fonction exponentielle et équations différentielles |
| EXERCICE IV | Calcul intégral et suite d'intégrales |
| EXERCICE V | Géométrie de l'espace, produit scalaire et distances |
| EXERCICE VI | Probabilités conditionnelles et loi binomiale |
| EXERCICE VII | Variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres |
| EXERCICE VIII | Combinatoire et dénombrement |

Exercice I Suites, récurrence et convergence

ENVIRON 5 POINTS

On considère les deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

On rappelle que $0! = 1$ et que, pour tout entier $k \geq 1$, $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_3 et de v_3 , sous forme de fractions.
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
3. (**à démontrer**) Établir que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!},$$

et en déduire le sens de variation de la suite (v_n) .

4. Vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!}$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$.
5. On admet que toute suite croissante et majorée converge. En s'appuyant sur les questions précédentes, justifier que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite, que l'on notera ℓ . Justifier alors que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n < \ell < v_n.$$

6. On considère la fonction Python suivante.

```

from math import factorial

def rang(p):
    n = 1
    while 1 / (n * factorial(n)) >= 10**(-p):
        n = n + 1
    return n

```

- a) Expliquer ce que renvoie l'appel `rang(p)` pour un entier $p \geq 1$ donné.
- b) Déterminer la valeur renvoyée par `rang(3)`. En déduire un encadrement de ℓ d'amplitude strictement inférieure à 10^{-3} .

Exercice II Fonction logarithme, dérivation, convexité et continuité

ENVIRON 6 POINTS

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A. Étude de la fonction.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Préciser les asymptotes de \mathcal{C} .
- Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. Dresser le tableau de variations de f et montrer que f admet un maximum que l'on précisera.
- Calculer $f''(x)$. Étudier la convexité de f et montrer que \mathcal{C} admet un unique point d'inflexion, dont on donnera l'abscisse exacte.

Partie B. Une équation et une comparaison.

- Soit c un réel. Discuter, suivant les valeurs de c , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = c$ d'inconnue $x \in]0; +\infty[$. On justifiera soigneusement à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.
- (à démontrer) On souhaite comparer les deux nombres e^π et π^e , où $\pi \approx 3,14$ et $e \approx 2,72$.
 - Montrer que l'inégalité $e^\pi > \pi^e$ équivaut à $f(e) > f(\pi)$.
 - En utilisant les variations de f , conclure.
- Calculer $\int_1^e f(x) dx$. Interpréter géométriquement ce résultat.

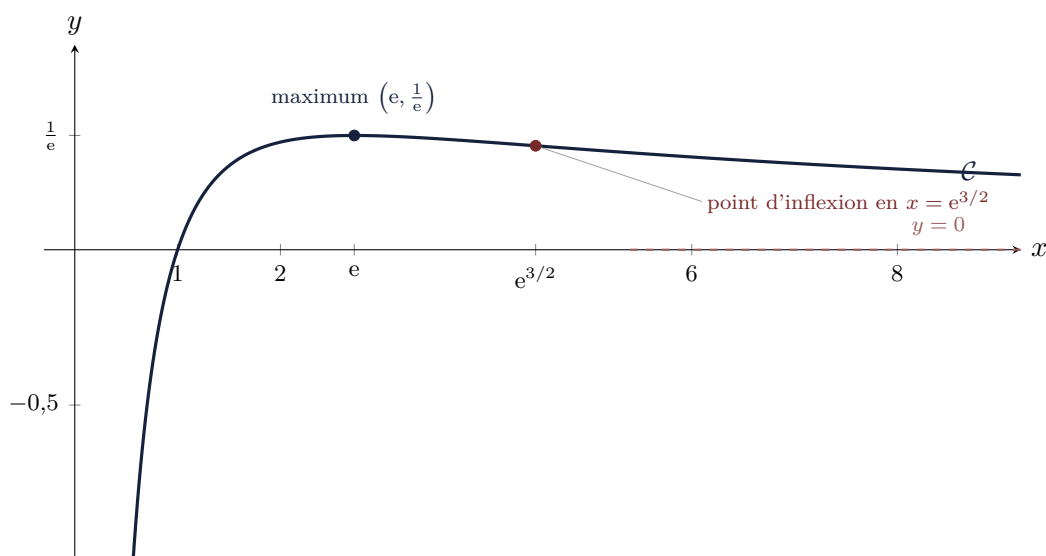


FIGURE 1. Courbe de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Exercice III *Fonction exponentielle et équations différentielles*

ENVIRON 5 POINTS

On étudie le refroidissement d'un liquide dans une pièce maintenue à la température de 20°C . On note $T(t)$ la température du liquide, en degrés Celsius, à l'instant t exprimé en minutes. On admet que T est une fonction dérivable sur $[0; +\infty[$ vérifiant

$$(E) \quad T'(t) = -0,2(T(t) - 20), \quad T(0) = 90.$$

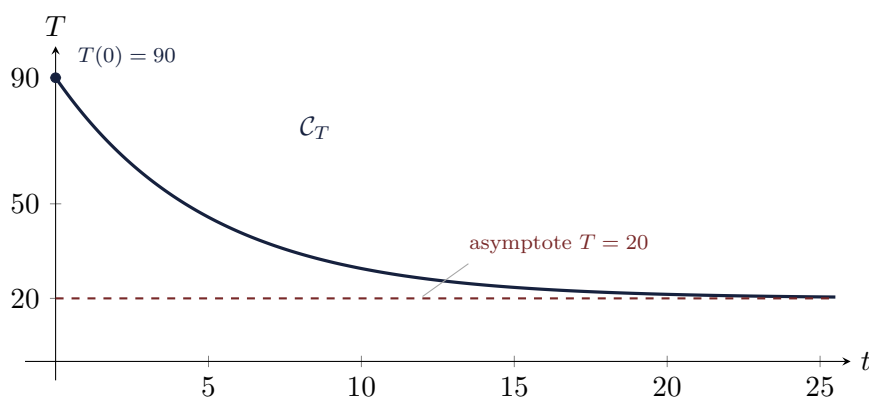
Partie A. Résolution.

1. Montrer que l'équation (E) peut s'écrire sous la forme $T' = aT + b$, où l'on précisera les réels a et b .
2. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $T' = aT + b$ sur $[0; +\infty[$.
3. (**à démontrer**) Déterminer l'unique fonction T solution de (E) vérifiant la condition initiale $T(0) = 90$. On montrera que

$$T(t) = 20 + 70e^{-0,2t}.$$

Partie B. Étude et exploitation.

4. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'expérience.
5. Étudier le sens de variation de T sur $[0; +\infty[$.
6. Calculer la valeur exacte de $T'(0)$. Interpréter ce nombre comme une vitesse de refroidissement.
7. Déterminer l'instant t , en minutes, au bout duquel la température du liquide atteint 50°C . On donnera la valeur exacte à l'aide d'un logarithme, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.
8. On appelle température moyenne du liquide sur l'intervalle $[0; 10]$ le réel $\frac{1}{10} \int_0^{10} T(t) dt$. Calculer sa valeur exacte.

FIGURE 2. Refroidissement $T(t) = 20 + 70e^{-0,2t}$.

Exercice IV Calcul intégral et suite d'intégrales

ENVIRON 5 POINTS

Pour tout entier naturel n , on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

1. Calculer I_0 .
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $I_n \geq 0$. Montrer ensuite que la suite (I_n) est décroissante.
3. (**à démontrer**) Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

On pourra remarquer que $x^n + x^{n+1} = x^n(1+x)$.

5. On pose, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_n = (-1)^n (\ln 2 - S_n).$$

6. En déduire la limite de la suite (S_n) . Quelle valeur remarquable obtient-on ainsi ?

Exercice V Géométrie de l'espace, produit scalaire et distances

ENVIRON 6 POINTS

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, dont les sommets ont pour coordonnées

$$A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), E(0,0,1), F(1,0,1), G(1,1,1), H(0,1,1).$$

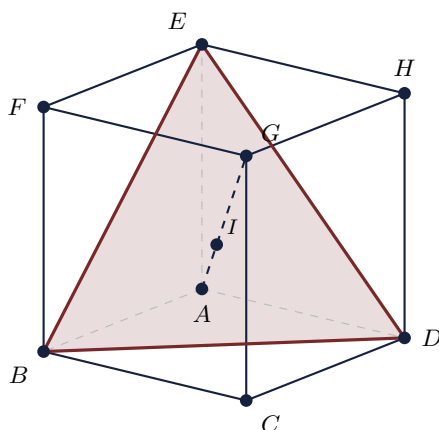


FIGURE 3. Le cube $ABCDEFGH$, le triangle BDE et la grande diagonale (AG) .

Partie A. Un plan et une distance.

1. Déterminer un vecteur normal au plan (BDE) . On pourra chercher un vecteur \vec{n} orthogonal à la fois à \overrightarrow{BD} et à \overrightarrow{BE} .
2. En déduire une équation cartésienne du plan (BDE) .
3. Calculer la distance du point G au plan (BDE) . Donner le résultat sous forme exacte, sans radical au dénominateur.

Partie B. Orthogonalité, intersection, volume.

4. (à démontrer) Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) .
5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG) , puis les coordonnées du point I d'intersection de (AG) et du plan (BDE) .
6. Montrer que le triangle BDE est équilatéral et calculer son aire exacte.
7. Calculer de deux manières le volume du tétraèdre $ABDE$:
 - a) directement, en choisissant une base et une hauteur appropriées ;
 - b) à l'aide de l'aire de BDE et de la distance de A au plan (BDE) .

Vérifier la cohérence des deux résultats.

8. On considère le plan (CFH) . Montrer qu'il est parallèle au plan (BDE) , puis calculer la distance entre ces deux plans.

Exercice VI Probabilités conditionnelles et loi binomiale

ENVIRON 5 POINTS

Partie A. Un test de dépistage.

Une maladie touche 2 % d'une population. On dispose d'un test dont on sait que : si une personne est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit une personne au hasard. On note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.

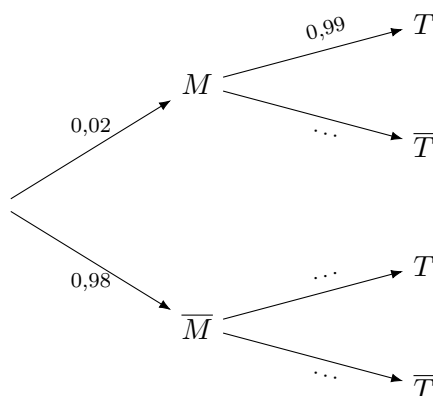


FIGURE 4. Arbre pondéré du test.

2. Calculer la probabilité que la personne soit malade et que le test soit positif.
3. (à démontrer) Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $P(T) = 0,0688$.
4. Une personne a un test positif. Calculer la probabilité qu'elle soit réellement malade. Donner la valeur exacte sous forme de fraction, puis une valeur approchée à 10^{-3} . Commenter le résultat obtenu.

Partie B. Contrôle d'un lot.

Une chaîne produit des composants. Chaque composant est défectueux avec la probabilité $p = 0,02$, indépendamment des autres. On prélève un lot de n composants et on note X le nombre de composants défectueux du lot.

5. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres en fonction de n .
6. On prend $n = 50$. Donner l'espérance et l'écart-type de X . Exprimer, sans les calculer numériquement, $P(X = 0)$ et $P(X \geq 2)$.
7. Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'observer au moins un composant défectueux dans le lot soit supérieure ou égale à 0,95. On exprimera la condition à l'aide d'un logarithme, puis on indiquera comment en déduire la valeur entière de n .

Exercice VII Variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres ENVIRON 5 POINTS

Partie A. Une variable aléatoire.

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs -1 , 0 et 2 avec

$$P(X = -1) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

1. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2. En déduire l'écart-type de X .

Partie B. Estimation d'une proportion.

On veut estimer la proportion inconnue p d'électeurs favorables à une mesure. On interroge n personnes choisies au hasard, de façon assimilée à un tirage avec remise. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $X_i = 1$ si la i -ème personne est favorable, et $X_i = 0$ sinon ; les variables X_1, \dots, X_n sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p . On note

$$F_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

3. Donner l'espérance et la variance d'une variable X_i .
4. (**à démontrer**) En utilisant les propriétés de l'espérance et de la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes, montrer que

$$E(F_n) = p \quad \text{et} \quad V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

5. On admet l'inégalité de concentration suivante (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) : pour tout réel $\delta > 0$,

$$P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{V(F_n)}{\delta^2}.$$

Justifier que, pour tout $p \in [0; 1]$, on a $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$. En déduire que, pour tout réel $\delta > 0$,

$$P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

6. Déterminer une valeur de n garantissant que $P(|F_n - p| \geq 0,01) \leq 0,05$, quelle que soit la valeur de p . Énoncer le résultat obtenu en lien avec la loi des grands nombres.

Exercice VIII *Combinatoire et dénombrement*

ENVIRON 5 POINTS

Partie A. Quelques dénombrements.

1. Un code est formé de 4 chiffres choisis parmi $\{0, 1, \dots, 9\}$.
 - a) Combien de codes peut-on former en tout ?
 - b) Combien de codes ne comportent que des chiffres distincts deux à deux ?
2. Un club compte 12 membres, dont 5 femmes et 7 hommes. On forme un comité de 4 personnes.
 - a) Combien de comités différents peut-on former ?
 - b) Combien de comités comportent exactement 2 femmes et 2 hommes ?
 - c) Combien de comités comportent au moins une femme ?

Partie B. Autour de la formule du binôme.

3. Rappeler la relation de Pascal liant $\binom{n}{k}$, $\binom{n-1}{k-1}$ et $\binom{n-1}{k}$, valable pour $1 \leq k \leq n-1$.
4. En appliquant la formule du binôme à $(1+1)^n$ et à $(1-1)^n$, établir les deux égalités

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (n \geq 1).$$

5. (à démontrer) On souhaite établir l'identité

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

Pour cela, on compte de deux façons le nombre de façons de constituer, parmi n personnes, un comité (de taille quelconque, éventuellement vide) puis de désigner un président parmi les membres de ce comité.

- a) En choisissant d'abord le comité, puis le président, montrer que ce nombre vaut $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.
- b) En choisissant d'abord le président parmi les n personnes, puis en complétant librement le comité avec les autres, montrer que ce même nombre vaut $n 2^{n-1}$.
- c) Conclure.

FIN DU SUJET.