Corrigé détaillé • Sujet № 2

Chaque étape justifiée, aucun calcul sous-entendu

Voici le corrigé complet du sujet d'entraînement № 2, le plus difficile des deux. Comme les énoncés ne donnaient aucun indice, j'ai pris soin de détailler non seulement les calculs, mais aussi la *façon de trouver* la méthode : comment repérer un point fixe, introduire une suite auxiliaire ou choisir la bonne intégration par parties.

Chaque question suit le même schéma que dans le premier corrigé :

— un encadré bleu **Rappel de cours** avec la définition, le théorème ou la méthode utile ;

— la **solution rédigée**, découpée en étapes numérotées où rien n'est laissé implicite ;

— des encadrés ambrés **Remarque**, **Attention** ou **Vérification** pour l'intuition, les pièges et les contrôles de cohérence ;

— un encadré vert **Conclusion** qui isole le résultat.

Les calculs sont littéraux d'abord, l'application numérique en dernier.

Un dernier mot : sur ce sujet plus exigeant, c'est normal de bloquer. Cherchez, laissez reposer, revenez-y, et ne lisez la solution qu'ensuite. C'est comme ça qu'on progresse vraiment.

Exercice I *Suites, encadrements et convergence*

Pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Question 1. Encadrement de $\ln(k+1) - \ln(k)$.

Rappel de cours

Lien logarithme-intégrale : $\ln b - \ln a = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ (pour $0 < a \leq b$).

Encadrement d'une intégrale : si $m \leq g(t) \leq M$ pour tout $t \in [a\,;b]$ (avec $a \leq b$), alors $m\,(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq M\,(b-a)$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Étape 1 : écrire la différence comme une intégrale.

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Étape 2 : encadrer $\frac{1}{t}$ sur $[k\,;k+1]$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante, pour $k \leq t \leq k+1$ on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Étape 3 : intégrer sur un intervalle de longueur 1. En intégrant cet encadrement sur $[k\,;k+1]$ (de longueur $(k+1)-k=1$) :

$$\frac{1}{k+1} \times 1 \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \times 1,$$

c'est-à-dire $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.

Pour tout entier $k \geq 1$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.

Question 2. Encadrement de H_n.

Rappel de cours

Somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$ (les termes intermédiaires se simplifient).

On peut additionner membre à membre des inégalités de même sens.

Étape 1 : borne inférieure. L'inégalité de droite de la question 1 s'écrit $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$, donc $\dfrac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$. On somme pour $k=1$ à n :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1).$$

Étape 2 : borne supérieure. Dans l'inégalité de gauche de la question 1, on remplace k par $k-1$: pour $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$. On isole le premier terme de H_n puis on somme à partir de $k = 2$:

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} (\ln k - \ln(k-1)) = 1 + (\ln n - \ln 1) = 1 + \ln n.$$

Pour tout $n \geq 1$: $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.

Question 3. Limite de H_n.

Rappel de cours

Si $H_n \geq w_n$ pour tout n et si $w_n \to +\infty$, alors $H_n \to +\infty$ (théorème de comparaison).

D'après la question 2, $H_n \geq \ln(n+1)$. Or $\ln(n+1) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Par comparaison, $H_n \to +\infty$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

Question 4. Limite de $\dfrac{H_n}{\ln n}$.

Rappel de cours

Théorème des gendarmes. On utilise aussi $\ln(n+1) = \ln\big(n(1+\frac{1}{n})\big) = \ln n + \ln\big(1+\frac{1}{n}\big)$.

Étape 1 : diviser l'encadrement par $\ln n$. Pour $n \geq 2$, $\ln n > 0$, donc en divisant l'encadrement de la question 2 par $\ln n$ (sans changer le sens) :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{1 + \ln n}{\ln n}.$$

Étape 2 : limite de la borne de droite.

$$\frac{1 + \ln n}{\ln n} = \frac{1}{\ln n} + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 + 1 = 1.$$

Étape 3 : limite de la borne de gauche.

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}.$$

Quand $n \to +\infty$, $\ln(1+\frac{1}{n}) \to 0$ et $\ln n \to +\infty$, donc le quotient tend vers 0 : la borne de gauche tend vers 1.

Étape 4 : conclure. Les deux bornes tendent vers 1 ; par le théorème des gendarmes, $\dfrac{H_n}{\ln n} \to 1$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{H_n}{\ln n} = 1$: autrement dit, H_n se comporte comme $\ln n$ pour les grands n.

Question 5. La suite (u_n) est décroissante.

Rappel de cours

$u_n = H_n - \ln n$. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, en utilisant $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1}$ (un seul terme ajouté à la somme).

Étape 1 : calculer la différence.

$$u_{n+1} - u_n = (H_{n+1} - H_n) - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n).$$

Étape 2 : utiliser la question 1. L'inégalité de gauche de la question 1 donne $\ln(n+1) - \ln(n) \geq \dfrac{1}{n+1}$. Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0.$$

$u_{n+1} - u_n \leq 0$: la suite (u_n) est décroissante.

Question 6. La suite (u_n) converge (démonstration exigée).

Rappel de cours

Théorème de convergence monotone : toute suite décroissante et minorée converge.

Étape 1 : minorer u_n. D'après la borne inférieure de la question 2, $H_n \geq \ln(n+1)$, donc

$$u_n = H_n - \ln n \geq \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0.$$

La suite (u_n) est donc minorée par 0.

Étape 2 : conclure. La suite (u_n) est décroissante (question 5) et minorée par 0, donc elle converge vers une limite réelle (positive ou nulle).

Remarque

Cette limite est la célèbre *constante d'Euler*, notée $\gamma \approx 0{,}577$. On vient de démontrer son existence. On peut alors écrire $H_n = \ln n + u_n$, ce qui confirme que H_n et $\ln n$ ont le même comportement à l'infini (question 4), avec un écart qui tend vers γ.

(u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge (vers la constante d'Euler γ).

Exercice II *Fonction exponentielle, convexité et continuité*

Fonction : $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, de courbe $\mathcal{C}$.

Question 1. Limites et asymptote.

Rappel de cours

Croissance comparée : $\lim_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ (l'exponentielle décroissante l'emporte sur la puissance).
Produit de limites : le produit de deux quantités tendant vers $+\infty$ tend vers $+\infty$.

Limite en $-\infty$. On écrit $f(x) = x^2 \times \mathrm{e}^{-x}$. Quand $x \to -\infty$: $x^2 \to +\infty$, et $-x \to +\infty$ donc $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$. Le produit tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Limite en $+\infty$. C'est la croissance comparée :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

La droite $y = 0$ (axe des abscisses) est donc asymptote horizontale en $+\infty$.

Remarque

En $-\infty$ la limite est infinie : il n'y a pas d'asymptote horizontale de ce côté.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (asymptote $y = 0$ en $+\infty$).

Question 2. Dérivée et variations.

Rappel de cours

Dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$. On rappelle $(\mathrm{e}^{-x})' = -\mathrm{e}^{-x}$.

Étape 1 : poser u et v. $u = x^2$ (donc $u' = 2x$) et $v = \mathrm{e}^{-x}$ (donc $v' = -\mathrm{e}^{-x}$).

Étape 2 : dériver et factoriser.

$$f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x} + x^2(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}(2x - x^2) = x(2-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Étape 3 : signe de f'. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du produit $x(2-x)$, qui s'annule en $x = 0$ et $x = 2$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$2-x$		$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Étape 4 : variations. f décroît sur $]-\infty\,;0]$, croît sur $[0\,;2]$, décroît sur $[2\,;+\infty[$. Elle présente un minimum local en $x = 0$, $f(0) = 0$, et un maximum local en $x = 2$, $f(2) = 4\,\mathrm{e}^{-2}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0

$f'(x) = x(2-x)\,\mathrm{e}^{-x}$; minimum $f(0) = 0$, maximum $f(2) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

Question 3. Convexité et points d'inflexion.

Rappel de cours

f convexe là où $f'' > 0$, concave là où $f'' < 0$; **point d'inflexion** là où f'' s'annule en changeant de signe. Racines de $ax^2 + bx + c$: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Étape 1 : dériver f'. On a $f'(x) = (2x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$. Avec $u = 2x - x^2$ ($u' = 2 - 2x$) et $v = \mathrm{e}^{-x}$ ($v' = -\mathrm{e}^{-x}$) :

$$f''(x) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x} + (2x - x^2)(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}\left[(2-2x) - (2x - x^2)\right] = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 4x + 2).$$

Étape 2 : signe de f''. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de f'' est celui du trinôme $x^2 - 4x + 2$. Son discriminant vaut $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 8 > 0$, et ses racines sont

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Le trinôme (de coefficient dominant positif) est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.

Étape 3 : conclure. f est convexe sur $]-\infty\,;2-\sqrt{2}]$ et sur $[2+\sqrt{2}\,;+\infty[$, concave sur $[2-\sqrt{2}\,;2+\sqrt{2}]$. En $x = 2 - \sqrt{2}$ et $x = 2 + \sqrt{2}$, f'' change de signe : ce sont deux points d'inflexion.

Remarque

Numériquement, $2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586$ et $2 + \sqrt{2} \approx 3{,}414$, ce qui correspond aux points marqués sur la figure du sujet.

$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$; deux points d'inflexion, d'abscisses $2 - \sqrt{2}$ et $2 + \sqrt{2}$.

Question 4. Nombre de solutions de $f(x) = c$.

Rappel de cours

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : sur un intervalle où f est continue et strictement monotone, l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution pour toute valeur c comprise entre les valeurs (ou limites) aux bornes.

On note $M = f(2) = 4\,\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}541$. D'après les variations, on découpe $\mathbb{R}$ en trois intervalles :

— sur $]-\infty\,;0]$, f décroît continûment de $+\infty$ à $f(0) = 0$;

— sur $[0\,;2]$, f croît continûment de 0 à M ;

— sur $[2\,;+\infty[$, f décroît continûment de M à 0 (limite non atteinte).

On discute selon c :

— **$c < 0$:** f ne prend jamais de valeur négative ($f \geq 0$). *Aucune* solution.

— **$c = 0$:** $f(x) = 0 \iff x^2\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff x = 0$. *Une* solution.

— **$0 < c < M$:** la valeur c est atteinte une fois sur chacun des trois intervalles. *Trois* solutions.

— **$c = M$:** sur $[0\,;2]$ et $[2\,;+\infty[$, le maximum M n'est atteint qu'en $x = 2$; sur $]-\infty\,;0]$, $c = M$ est atteint une fois (puisque f y décrit $]0\,;+\infty[$). *Deux* solutions.

— $c > M$ **:** seules les valeurs supérieures à M sont atteintes par la branche $]-\infty\,;0]$ (qui monte jusqu'à $+\infty$), une seule fois. *Une* solution.

Nombre de solutions de $f(x) = c$: 0 si $c < 0$; 1 si $c = 0$; 3 si $0 < c < \frac{4}{e^2}$; 2 si $c = \frac{4}{e^2}$; 1 si $c > \frac{4}{e^2}$.

Question 5. Calcul de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Rappel de cours

Intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$. On l'applique deux fois pour faire « descendre » la puissance de x.

Étape 1 : première intégration par parties. On pose $u = x^2$ ($u' = 2x$) et $v' = \mathrm{e}^{-x}$ ($v = -\mathrm{e}^{-x}$) :

$$\int_0^2 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -4\mathrm{e}^{-2} + 2\int_0^2 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

(Le crochet vaut $-2^2\mathrm{e}^{-2} - 0 = -4\mathrm{e}^{-2}$.)

Étape 2 : seconde intégration par parties. Pour $\displaystyle\int_0^2 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, on pose $u = x$ ($u' = 1$) et $v' = \mathrm{e}^{-x}$ ($v = -\mathrm{e}^{-x}$) :

$$\int_0^2 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -2\mathrm{e}^{-2} + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 = -2\mathrm{e}^{-2} + \left(-\mathrm{e}^{-2} + 1\right) = 1 - 3\mathrm{e}^{-2}.$$

Étape 3 : rassembler.

$$\int_0^2 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -4\mathrm{e}^{-2} + 2\left(1 - 3\mathrm{e}^{-2}\right) = -4\mathrm{e}^{-2} + 2 - 6\mathrm{e}^{-2} = 2 - 10\,\mathrm{e}^{-2}.$$

Étape 4 : interprétation. Sur $[0\,;2]$, $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} \geq 0$, donc l'intégrale représente l'aire, en unités d'aire, de la région comprise entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$.

Vérification

$2 - 10\mathrm{e}^{-2} \approx 2 - 1{,}353 = 0{,}647$, une aire positive et inférieure à celle du rectangle $[0\,;2] \times [0\,;M]$ d'aire $2M \approx 1{,}08$: c'est cohérent.

$\displaystyle\int_0^2 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2 - 10\,\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}647$ unité d'aire.

Exercice III *Équations différentielles et suite récurrente*

Entre deux injections, $q'(t) = -k\,q(t)$ avec $k > 0$. Injections de 10 mg à chaque heure, u_n = quantité juste après la n-ième injection, $u_0 = 10$.

Question 1 (Partie A). Résolution de $q' = -k\,q$.

Rappel de cours

Cours : les solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y$ sont les fonctions $t \mapsto C\,\mathrm{e}^{at}$, $C \in \mathbb{R}$.

Ici le coefficient est $a = -k$, donc les solutions sont

$$q(t) = C\,\mathrm{e}^{-kt}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$q(t) = C\,\mathrm{e}^{-kt}$, avec C réel quelconque.

Question 2 (Partie A). Demi-vie et valeur de k.

Rappel de cours

$\mathrm{e}^X = A \iff X = \ln A$ (pour $A > 0$), et $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$.

Étape 1 : exprimer $q(t+T)$.

$$q(t+T) = C\,\mathrm{e}^{-k(t+T)} = C\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{e}^{-kT} = q(t)\,\mathrm{e}^{-kT}.$$

Étape 2 : traduire la demi-vie. La condition $q(t+T) = \frac{1}{2}q(t)$ pour tout t équivaut à

$$\mathrm{e}^{-kT} = \frac{1}{2}.$$

Étape 3 : isoler T. En appliquant ln : $-kT = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$, d'où

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Étape 4 : valeur de k. Avec $T = 1$: $1 = \dfrac{\ln 2}{k}$, donc $k = \ln 2 \approx 0{,}693$ (par heure).

$T = \dfrac{\ln 2}{k}$; avec $T = 1$ h, $k = \ln 2$.

Question 3 (Partie B). Relation entre u_{n+1} et u_n.

Rappel de cours

D'après la partie A, sur une durée Δt sans injection, la quantité est multipliée par $\mathrm{e}^{-k\Delta t}$. Comme $k = \ln 2$, sur $\Delta t = 1$ heure le facteur vaut $\mathrm{e}^{-k} = \mathrm{e}^{-\ln 2} = \dfrac{1}{2}$.

Étape 1 : évolution entre deux injections. Juste après la n-ième injection, la quantité est u_n. Une heure plus tard, juste avant l'injection suivante, elle a été multipliée par $\dfrac{1}{2}$: elle vaut $\dfrac{1}{2}u_n$.

Étape 2 : ajout de la dose. L'injection $n+1$ ajoute 10 mg :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\,u_n + 10.$$

Pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,u_n + 10$.

Question 4 (Partie B). Calcul de u_1, u_2, u_3.

$$u_1 = \tfrac{1}{2} \times 10 + 10 = 15, \qquad u_2 = \tfrac{1}{2} \times 15 + 10 = 17{,}5, \qquad u_3 = \tfrac{1}{2} \times 17{,}5 + 10 = 18{,}75.$$

$u_1 = 15$, $u_2 = 17{,}5$, $u_3 = 18{,}75$.

Question 5 (Partie B). Pour tout n, $u_n < 20$.

Rappel de cours

Raisonnement par récurrence : initialisation, puis hérédité.

Initialisation. $u_0 = 10 < 20$: vrai au rang 0.

Hérédité. Supposons $u_n < 20$. Alors $\dfrac{1}{2}u_n < \dfrac{1}{2} \times 20 = 10$, donc

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10 < 10 + 10 = 20.$$

La propriété se transmet.

Pour tout entier naturel n, $u_n < 20$.

Question 6 (Partie B). Sens de variation.

Rappel de cours

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \left(\tfrac{1}{2}u_n + 10\right) - u_n = 10 - \tfrac{1}{2}u_n = \tfrac{1}{2}(20 - u_n).$$

D'après la question 5, $u_n < 20$, donc $20 - u_n > 0$, et $u_{n+1} - u_n > 0$.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}(20 - u_n) > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

Question 7 (Partie B). Convergence et limite (démonstration exigée).

Rappel de cours

Convergence monotone : une suite croissante et majorée converge. La limite L d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ (avec f continue) vérifie $L = f(L)$.

Étape 1 : existence de la limite. La suite (u_n) est croissante (question 6) et majorée par 20 (question 5), donc elle converge vers un réel L.

Étape 2 : calcul de la limite. En passant à la limite dans $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 10$ (les deux membres tendent vers L) :

$$L = \frac{1}{2}L + 10 \iff \frac{1}{2}L = 10 \iff L = 20.$$

Remarque

La limite 20 est exactement le « palier » visible sur la figure 2 : les quantités juste après injection s'accumulent vers 20 mg.

(u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 20$.

Question 8 (Partie B). Expression de u_n.

Rappel de cours

Suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ **:** on détermine le point fixe ℓ tel que $\ell = a\ell + b$, puis on montre que la suite $w_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a.

Étape 1 : point fixe. On résout $\ell = \dfrac{1}{2}\ell + 10$, soit $\dfrac{1}{2}\ell = 10$, donc $\ell = 20$.

Étape 2 : la suite $w_n = u_n - 20$ est géométrique.

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 20 = \left(\tfrac{1}{2}u_n + 10\right) - 20 = \tfrac{1}{2}u_n - 10 = \tfrac{1}{2}(u_n - 20) = \tfrac{1}{2}\, w_n.$$

Donc (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

Étape 3 : premier terme et forme close. $w_0 = u_0 - 20 = 10 - 20 = -10$, donc $w_n = -10\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, puis

$$u_n = w_n + 20 = 20 - 10\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Vérification

$u_0 = 20 - 10 = 10$, $u_1 = 20 - 5 = 15$, $u_2 = 20 - 2{,}5 = 17{,}5$: on retrouve la question 4. Et $\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \to 0$ donne bien $u_n \to 20$.

$u_n = 20 - 10\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Question 9 (Partie B). Plus petit n tel que $u_n \geq 19{,}9$.

Rappel de cours

Diviser par $\ln\frac{1}{2} < 0$ inverse le sens d'une inégalité.

Étape 1 : traduire la condition.

$$u_n \geq 19{,}9 \iff 20 - 10\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \geq 19{,}9 \iff 10\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \leq 0{,}1 \iff \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \leq 0{,}01.$$

Étape 2 : appliquer $\ln$.

$$n\ln\tfrac{1}{2} \leq \ln 0{,}01.$$

Étape 3 : diviser par $\ln\frac{1}{2} < 0$ (sens inversé).

$$n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln\frac{1}{2}}.$$

Étape 4 : application numérique.

$$\frac{\ln 0{,}01}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{-\ln 100}{-\ln 2} \approx \frac{-4{,}605}{-0{,}693} \approx 6{,}64.$$

Le plus petit entier supérieur ou égal à 6,64 est 7.

Vérification

$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128} \approx 0{,}0078 \leq 0{,}01$, tandis que $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \approx 0{,}0156 > 0{,}01$: le rang 7 est bien le premier qui convient.

Le plus petit entier convenable est $n = 7$.

Exercice IV *Calcul intégral et suite d'intégrales*

Pour tout entier naturel n : $K_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$.

Question 1. Calcul de K_0 et K_1.

Rappel de cours

Une primitive de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto x\ln x - x$. On le vérifie en dérivant : $(x\ln x - x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

Calcul de K_0. Comme $(\ln x)^0 = 1$:

$$K_0 = \int_1^{\mathrm{e}} 1 \,\mathrm{d}x = [x]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - 1.$$

Calcul de K_1.

$$K_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_1^{\mathrm{e}} = (\mathrm{e} \cdot 1 - \mathrm{e}) - (1 \cdot 0 - 1) = 0 - (-1) = 1.$$

$K_0 = \mathrm{e} - 1$ et $K_1 = 1$.

Question 2. Relation de récurrence (démonstration exigée).

Rappel de cours

Intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$. On rappelle $((\ln x)^n)' = n(\ln x)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{x}$, $\ln \mathrm{e} = 1$ et $\ln 1 = 0$.

Étape 1 : choisir les facteurs. On écrit $(\ln x)^n = 1 \times (\ln x)^n$ et on pose $v = (\ln x)^n$ (donc $v' = n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}$) et $u' = 1$ (donc $u = x$).

Étape 2 : appliquer la formule.

$$K_n = \int_1^{\mathrm{e}} 1 \cdot (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = [x(\ln x)^n]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \cdot n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x.$$

Étape 3 : calculer le crochet.

$$[x(\ln x)^n]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}\,(\ln \mathrm{e})^n - 1\,(\ln 1)^n = \mathrm{e} \cdot 1^n - 1 \cdot 0^n = \mathrm{e}.$$

Étape 4 : simplifier l'intégrale restante. Comme $x \cdot \frac{1}{x} = 1$:

$$\int_1^{\mathrm{e}} x \cdot n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = n\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^{n-1} \,\mathrm{d}x = n\,K_{n-1}.$$

En rassemblant : $K_n = \mathrm{e} - n\,K_{n-1}$.

Pour tout $n \geq 1$, $K_n = \mathrm{e} - n\,K_{n-1}$.

Question 3. Calcul de K_2 et K_3.

En appliquant la relation de récurrence :

$$K_2 = \mathrm{e} - 2K_1 = \mathrm{e} - 2,$$

$$K_3 = \mathrm{e} - 3K_2 = \mathrm{e} - 3(\mathrm{e} - 2) = \mathrm{e} - 3\mathrm{e} + 6 = 6 - 2\mathrm{e}.$$

Vérification

$K_2 = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$ et $K_3 = 6 - 2\mathrm{e} \approx 0{,}564$. On a bien $K_0 \approx 1{,}718 > K_1 = 1 > K_2 > K_3 > 0$, ce qui annonce la décroissance et la positivité étudiées ensuite.

$K_2 = \mathrm{e} - 2$ et $K_3 = 6 - 2\mathrm{e}$.

Question 4. Positivité de K_n.

Rappel de cours

Si $g(x) \geq 0$ sur $[a\,;b]$ avec $a \leq b$, alors $\int_a^b g \geq 0$.

Sur $[1\,;\mathrm{e}]$, on a $1 \leq x \leq \mathrm{e}$, donc $0 \leq \ln x \leq 1$; par suite $(\ln x)^n \geq 0$. Les bornes vérifient $1 \leq \mathrm{e}$, donc l'intégrale est positive.

Pour tout entier naturel n, $K_n \geq 0$.

Question 5. Sens de variation de (K_n).

Rappel de cours

On étudie le signe de $K_{n+1} - K_n$ en regroupant les deux intégrales (linéarité).

Étape 1 : écrire la différence.

$$K_{n+1} - K_n = \int_1^{\mathrm{e}} \left[(\ln x)^{n+1} - (\ln x)^n\right] \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n (\ln x - 1)\,\mathrm{d}x.$$

Étape 2 : signe de l'intégrande. Sur $[1\,;\mathrm{e}]$, $(\ln x)^n \geq 0$ et $\ln x \leq 1$ donc $\ln x - 1 \leq 0$. Le produit est donc négatif ou nul, et l'intégrale est négative.

Remarque

Intuitivement, comme $0 \leq \ln x \leq 1$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$, élever $\ln x$ à une puissance plus grande le diminue : on intègre une fonction plus petite, d'où $K_{n+1} \leq K_n$.

$K_{n+1} - K_n \leq 0$: la suite (K_n) est décroissante.

Question 6. Encadrement et limite (démonstration exigée).

Rappel de cours

On combine la relation de récurrence (question 2) et la positivité (question 4), puis on applique le théorème des gendarmes.

Étape 1 : établir l'encadrement. La relation $K_n = \mathrm{e} - n\,K_{n-1}$ donne $n\,K_{n-1} = \mathrm{e} - K_n$. Comme $K_n \geq 0$ (question 4), on a $\mathrm{e} - K_n \leq \mathrm{e}$, donc

$$n\,K_{n-1} = \mathrm{e} - K_n \leq \mathrm{e} \implies K_{n-1} \leq \frac{\mathrm{e}}{n}.$$

Et $K_{n-1} \geq 0$ (question 4). D'où $0 \leq K_{n-1} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n}$.

Étape 2 : passer à la limite. Quand $n \to +\infty$, $\dfrac{\mathrm{e}}{n} \to 0$, et la borne de gauche est nulle. Par le théorème des gendarmes, $K_{n-1} \to 0$, c'est-à-dire $K_n \to 0$.

$0 \leq K_{n-1} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n = 0$.

Question 7. Limite de $n\,K_{n-1}$.

Rappel de cours

Opérations sur les limites : si $K_n \to 0$, alors $\mathrm{e} - K_n \to \mathrm{e}$.

D'après la relation de récurrence, $n\,K_{n-1} = \mathrm{e} - K_n$. Comme $K_n \to 0$ (question 6) :

$$\lim_{n \to +\infty} n\,K_{n-1} = \mathrm{e} - 0 = \mathrm{e}.$$

Remarque

C'est une situation de forme indéterminée « $\infty \times 0$ » : bien que $K_{n-1} \to 0$, le facteur n compense exactement, et le produit tend vers e.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n\,K_{n-1} = \mathrm{e}$.

Exercice V *Géométrie de l'espace, plan et sphère*

$O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,4)$.

Question 1. Équation cartésienne du plan (ABC).

Rappel de cours

Un vecteur normal $\vec{n} = (a,b,c)$ au plan est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : ses coordonnées vérifient $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. L'équation du plan est alors $ax + by + cz + d = 0$, d étant déterminé par un point.

Étape 1 : deux vecteurs du plan.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,2,0), \qquad \overrightarrow{AC} = C - A = (-2,0,4).$$

Étape 2 : trouver un vecteur normal. On cherche $\vec{n} = (a,b,c)$ tel que

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -2a + 2b = 0 \;\Rightarrow\; b = a, \qquad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -2a + 4c = 0 \;\Rightarrow\; a = 2c.$$

En prenant $c = 1$, on obtient $a = 2$, $b = 2$, donc $\vec{n} = (2,2,1)$.

Étape 3 : déterminer d. L'équation est $2x + 2y + z + d = 0$. Le point $A(2,0,0)$ y appartient : $2 \times 2 + 0 + 0 + d = 0$, donc $d = -4$.

Vérification

$B(0,2,0)$: $2 \times 2 = 4$; $C(0,0,4)$: 4. Les trois points vérifient $2x + 2y + z = 4$.

Une équation de (ABC) est $2x + 2y + z - 4 = 0$, soit $2x + 2y + z = 4$.

Question 2. Distance de O au plan (ABC).

Rappel de cours

$$d(M, \text{plan}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Avec $O(0,0,0)$ et le plan $2x + 2y + z - 4 = 0$:

$$d(O,(ABC)) = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}.$$

$$d(O,(ABC)) = \frac{4}{3}.$$

Question 3. Projeté orthogonal H de O sur (ABC).

Rappel de cours

Le projeté orthogonal H est l'intersection du plan avec la droite passant par O et de vecteur directeur le vecteur normal $\vec{n}$.

Étape 1 : droite orthogonale. Elle passe par O et est dirigée par $\vec{n} = (2,2,1)$:

$$(x,y,z) = (2t,\ 2t,\ t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Étape 2 : intersection avec le plan. On reporte dans $2x+2y+z=4$:

$$2(2t)+2(2t)+t=4 \iff 4t+4t+t=4 \iff 9t=4 \iff t=\frac{4}{9}.$$

Étape 3 : coordonnées de H.

$$H=\left(\frac{8}{9},\frac{8}{9},\frac{4}{9}\right).$$

Vérification

$OH=\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2}=\frac{\sqrt{64+64+16}}{9}=\frac{\sqrt{144}}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$, ce qui coïncide avec la distance de la question 2.

$H=\left(\frac{8}{9},\frac{8}{9},\frac{4}{9}\right)$.

Question 4. Volume du tétraèdre $OABC$.

Rappel de cours

$V=\frac{1}{3}\times(\text{aire de la base})\times(\text{hauteur})$.

On prend pour base le triangle OAB, situé dans le plan $z=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}=(2,0,0)$ et $\overrightarrow{OB}=(0,2,0)$ sont portés par les axes, donc perpendiculaires, de longueurs 2 et 2 : l'aire de OAB vaut $\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$. Le sommet $C(0,0,4)$ est à la hauteur $z=4$ au-dessus de ce plan. Donc

$$V=\frac{1}{3}\times 2\times 4=\frac{8}{3}.$$

$V_{OABC}=\frac{8}{3}$.

Question 5. Aire du triangle ABC.

Rappel de cours

En prenant ABC comme base et O comme sommet, $V=\frac{1}{3}\times \text{aire}(ABC)\times d(O,(ABC))$, d'où l'on tire l'aire.

On isole l'aire :

$$\text{aire}(ABC)=\frac{3V}{d(O,(ABC))}=\frac{3\times\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{8}{\frac{4}{3}}=8\times\frac{3}{4}=6.$$

Vérification

Les côtés mesurent $AB=\|(-2,2,0)\|=2\sqrt{2}$ et $AC=BC=2\sqrt{5}$. Le triangle est isocèle ; un calcul direct de son aire redonne bien 6.

$\text{aire}(ABC)=6$.

Question 6. Sphère circonscrite au tétraèdre $OABC$.

Rappel de cours

Le centre Ω de la sphère circonscrite est équidistant des quatre sommets. On traduit ces égalités sur les *carrés* des distances, ce qui élimine les racines.

Étape 1 : poser $\Omega = (x, y, z)$ et écrire $\Omega O^2 = \Omega A^2$.

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x-2)^2 + y^2 + z^2 \iff 0 = -4x + 4 \iff x = 1.$$

Étape 2 : $\Omega O^2 = \Omega B^2$.

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 \iff 0 = -4y + 4 \iff y = 1.$$

Étape 3 : $\Omega O^2 = \Omega C^2$.

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-4)^2 \iff 0 = -8z + 16 \iff z = 2.$$

Étape 4 : centre, rayon, équation. Le centre est $\Omega(1, 1, 2)$, et

$$R^2 = \Omega O^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6, \qquad R = \sqrt{6}.$$

L'équation de la sphère est

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6.$$

Vérification

$\Omega A^2 = (1-2)^2 + 1^2 + 2^2 = 1 + 1 + 4 = 6 = R^2$: le point A est bien sur la sphère (idem pour B et C).

Sphère de centre $\Omega(1, 1, 2)$ et de rayon $\sqrt{6}$: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$.

Exercice VI *Probabilités, modèle d'évolution à deux états*

$a_n = P(\text{serveur disponible le jour } n)$, $a_0 = 1$. Transitions : $A \to A$ avec 0,7, $B \to A$ avec 0,4.

Question 1. Calcul de a_1 et a_2.

Rappel de cours

Formule des probabilités totales : les événements A_n (disponible) et B_n (en panne) le jour n forment une partition, donc $a_{n+1} = P(A_n)\, P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)\, P_{B_n}(A_{n+1})$.

Calcul de a_1. Le jour 0, le serveur est disponible ($a_0 = 1$, donc $P(B_0) = 0$) :

$$a_1 = a_0 \times 0{,}7 + (1 - a_0) \times 0{,}4 = 1 \times 0{,}7 + 0 \times 0{,}4 = 0{,}7.$$

Calcul de a_2.

$$a_2 = a_1 \times 0{,}7 + (1 - a_1) \times 0{,}4 = 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}49 + 0{,}12 = 0{,}61.$$

$a_1 = 0{,}7$ et $a_2 = 0{,}61$.

Question 2. Relation entre a_{n+1} et a_n.

Rappel de cours

On applique la formule des probabilités totales avec $P(B_n) = 1 - a_n$, $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0{,}7$ (le serveur disponible le reste) et $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0{,}4$ (le serveur en panne est réparé).

Étape 1 : appliquer la formule.

$$a_{n+1} = 0{,}7\, a_n + 0{,}4\,(1 - a_n).$$

Étape 2 : développer et réduire.

$$a_{n+1} = 0{,}7\, a_n + 0{,}4 - 0{,}4\, a_n = 0{,}3\, a_n + 0{,}4.$$

Pour tout n, $a_{n+1} = 0{,}3\, a_n + 0{,}4$.

Question 3. Pour tout n, $a_n > \dfrac{4}{7}$.

Rappel de cours

Récurrence. On notera que $0{,}3 \times \dfrac{4}{7} + 0{,}4 = \dfrac{4}{7}$ (le réel $\frac{4}{7}$ est le point fixe de la relation).

Initialisation. $a_0 = 1 > \dfrac{4}{7}$: vrai au rang 0.

Hérédité. Supposons $a_n > \dfrac{4}{7}$. En multipliant par $0{,}3 > 0$ puis en ajoutant 0,4 (opérations qui conservent l'inégalité) :

$$a_{n+1} = 0{,}3\, a_n + 0{,}4 > 0{,}3 \times \frac{4}{7} + 0{,}4.$$

Or $0{,}3 \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{6}{35}$ et $0{,}4 = \dfrac{14}{35}$, donc $0{,}3 \times \dfrac{4}{7} + 0{,}4 = \dfrac{6+14}{35} = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7}$. Ainsi $a_{n+1} > \dfrac{4}{7}$.

Pour tout entier naturel n, $a_n > \dfrac{4}{7}$.

Question 4. Sens de variation de (a_n).

Rappel de cours

On étudie le signe de $a_{n+1} - a_n$.

$$a_{n+1} - a_n = (0{,}3\,a_n + 0{,}4) - a_n = 0{,}4 - 0{,}7\,a_n = 0{,}7\left(\frac{4}{7} - a_n\right),$$

en utilisant $0{,}7 \times \dfrac{4}{7} = 0{,}4$. D'après la question 3, $a_n > \dfrac{4}{7}$, donc $\dfrac{4}{7} - a_n < 0$ et $a_{n+1} - a_n < 0$.

$a_{n+1} - a_n = 0{,}7\left(\dfrac{4}{7} - a_n\right) < 0$: la suite (a_n) est décroissante.

Question 5. Convergence et limite (démonstration exigée).

Rappel de cours

Convergence monotone : décroissante et minorée $\Rightarrow$ convergente. La limite L vérifie $L = 0{,}3\,L + 0{,}4$.

Étape 1 : existence. (a_n) est décroissante (question 4) et minorée par $\dfrac{4}{7}$ (question 3), donc elle converge vers un réel L.

Étape 2 : valeur de la limite. En passant à la limite dans $a_{n+1} = 0{,}3\,a_n + 0{,}4$:

$$L = 0{,}3\,L + 0{,}4 \iff 0{,}7\,L = 0{,}4 \iff L = \frac{0{,}4}{0{,}7} = \frac{4}{7}.$$

(a_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{4}{7}$.

Question 6. Expression de a_n.

Rappel de cours

Suite arithmético-géométrique : on introduit $w_n = a_n - \ell$ où ℓ est le point fixe ; (w_n) est alors géométrique de raison le coefficient devant a_n.

Étape 1 : point fixe. $\ell = 0{,}3\,\ell + 0{,}4$ donne $\ell = \dfrac{4}{7}$ (question 5).

Étape 2 : $w_n = a_n - \dfrac{4}{7}$ est géométrique.

$$w_{n+1} = a_{n+1} - \frac{4}{7} = 0{,}3\,a_n + 0{,}4 - \frac{4}{7}.$$

Comme $0{,}4 - \dfrac{4}{7} = \dfrac{14}{35} - \dfrac{20}{35} = -\dfrac{6}{35}$ et $0{,}3\,a_n = 0{,}3\left(w_n + \dfrac{4}{7}\right) = 0{,}3\,w_n + \dfrac{6}{35}$, on obtient

$$w_{n+1} = 0{,}3\,w_n + \frac{6}{35} - \frac{6}{35} = 0{,}3\,w_n.$$

Donc (w_n) est géométrique de raison 0,3.

Étape 3 : forme close. $w_0 = a_0 - \frac{4}{7} = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$, donc $w_n = \frac{3}{7}\,(0{,}3)^n$, puis

$$a_n = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\,(0{,}3)^n.$$

Vérification

$a_0 = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 1$ et $a_1 = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \times 0{,}3 = \frac{4}{7} + \frac{0{,}9}{7} = \frac{4{,}9}{7} = 0{,}7$: cohérent avec la question 1.

$a_n = \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{7}\,(0{,}3)^n.$

Question 7. Plus petit n tel que $\left|a_n - \dfrac{4}{7}\right| \leq 10^{-2}$.

Rappel de cours

Diviser par $\ln(0{,}3) < 0$ inverse le sens d'une inégalité.

Étape 1 : expliciter l'écart. Comme $a_n - \dfrac{4}{7} = \dfrac{3}{7}(0{,}3)^n > 0$:

$$\left|a_n - \frac{4}{7}\right| = \frac{3}{7}\,(0{,}3)^n \leq 10^{-2} \iff (0{,}3)^n \leq \frac{3}{7}^{-1} \times 10^{-2} = \frac{7}{3} \times 10^{-2} = \frac{7}{300}.$$

Étape 2 : appliquer $\ln$ et diviser par $\ln(0{,}3) < 0$.

$$n\ln(0{,}3) \leq \ln\frac{7}{300} \iff n \geq \frac{\ln(7/300)}{\ln(0{,}3)}.$$

Étape 3 : application numérique.

$$\frac{\ln(7/300)}{\ln(0{,}3)} \approx \frac{-3{,}758}{-1{,}204} \approx 3{,}12.$$

Le plus petit entier supérieur ou égal à 3,12 est 4.

Vérification

$\frac{3}{7}(0{,}3)^4 = \frac{3}{7} \times 0{,}0081 \approx 0{,}0035 \leq 0{,}01$, alors que $\frac{3}{7}(0{,}3)^3 = \frac{3}{7} \times 0{,}027 \approx 0{,}0116 > 0{,}01$: le rang 4 est bien le premier qui convient.

Le plus petit entier convenable est $n = 4$.

Exercice VII *Loi binomiale, valeur la plus probable et concentration*

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$, $n \geq 1$, $p \in]0\,;1[$.

Question 1 (Partie A). Rappels sur la loi binomiale.

Rappel de cours

Pour $X \sim \mathcal{B}(n\,;p)$: la probabilité de k succès, l'espérance et la variance sont des résultats du cours.

Pour $0 \leq k \leq n$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad E(X) = np, \qquad \mathrm{V}(X) = np(1-p).$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ E(X) = np,\ \mathrm{V}(X) = np(1-p).$$

Question 2 (Partie A). Quotient de deux probabilités successives (démonstration exigée).

Rappel de cours

Quotient de coefficients binomiaux : $\dfrac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \dfrac{n-k}{k+1}$. On le retrouve avec les factorielles : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Étape 1 : écrire le quotient.

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}.$$

Étape 2 : simplifier les puissances.

$$\frac{p^{k+1}}{p^k} = p, \qquad \frac{(1-p)^{n-k-1}}{(1-p)^{n-k}} = (1-p)^{-1} = \frac{1}{1-p}.$$

Étape 3 : simplifier les coefficients.

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}}{\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}} = \frac{k!\,(n-k)!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1},$$

car $\dfrac{(n-k)!}{(n-k-1)!} = n-k$ et $\dfrac{k!}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k+1}$.

Étape 4 : rassembler.

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{1-p} = \frac{(n-k)\,p}{(k+1)(1-p)}.$$

Pour $0 \leq k \leq n-1$, $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \dfrac{(n-k)\,p}{(k+1)(1-p)}$.

Question 3 (Partie A). Valeurs de k où P croît.

Rappel de cours

$P(X=k+1) > P(X=k)$ équivaut à ce que le quotient de la question 2 soit strictement supérieur à 1.

Étape 1 : poser l'inégalité. Comme $(k+1)(1-p) > 0$:

$$\frac{(n-k)\,p}{(k+1)(1-p)} > 1 \iff (n-k)\,p > (k+1)(1-p).$$

Étape 2 : développer.

$$np - kp > k + 1 - (k+1)p = k + 1 - kp - p.$$

On ajoute kp aux deux membres :

$$np > k + 1 - p \iff k < np + p - 1 = (n+1)p - 1.$$

Étape 3 : conclusion. La probabilité $P(X=k)$ croît tant que $k < (n+1)p - 1$, puis décroît. La valeur la plus probable (le mode) est donc située au voisinage de $k = (n+1)p$.

$P(X=k+1) > P(X=k) \iff k < (n+1)p - 1.$

Question 4 (Partie B). Valeur la plus probable pour $n = 10$, $p = 0{,}3$.

Rappel de cours

On applique le critère de la question 3 avec les valeurs numériques.

On calcule $(n+1)p - 1 = 11 \times 0{,}3 - 1 = 3{,}3 - 1 = 2{,}3$. Ainsi $P(X=k+1) > P(X=k)$ pour $k < 2{,}3$, c'est-à-dire pour $k = 0, 1, 2$: on a $P(X{=}0) < P(X{=}1) < P(X{=}2) < P(X{=}3)$. Pour $k \geq 3$, la suite décroît. La probabilité est donc maximale en $k = 3$.

Remarque

Ce mode $k = 3$ coïncide avec la partie entière de $(n+1)p = 3{,}3$, et il est proche de l'espérance $E(X) = np = 3$.

La valeur la plus probable de X est $k = 3$.

Question 5 (Partie B). Espérance et écart-type.

$$E(X) = np = 10 \times 0{,}3 = 3, \qquad \mathrm{V}(X) = np(1-p) = 10 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 2{,}1,$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sqrt{2{,}1} \approx 1{,}449.$$

$E(X) = 3$ et $\sigma(X) = \sqrt{2{,}1} \approx 1{,}449.$

Question 6 (Partie B). Majoration par Bienaymé-Tchebychev.

Rappel de cours

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout $\delta > 0$, $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \dfrac{\mathrm{V}(X)}{\delta^2}$.

Étape 1 : appliquer l'inégalité. Avec $E(X) = 3$ et $\delta = 3$:

$$P(|X - 3| \geq 3) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{3^2} = \frac{2{,}1}{9} \approx 0{,}233.$$

Étape 2 : en déduire une majoration de $P(X \geq 6)$. Si $X \geq 6$, alors $X - 3 \geq 3$, donc $|X - 3| \geq 3$: l'événement $\{X \geq 6\}$ est inclus dans $\{|X - 3| \geq 3\}$. Par croissance des probabilités,

$$P(X \geq 6) \leq P(|X - 3| \geq 3) \leq \frac{2{,}1}{9} \approx 0{,}233.$$

Remarque

C'est une majoration garantie mais assez grossière : la valeur exacte $P(X \geq 6)$ est en réalité bien plus petite (de l'ordre de 0,05). L'intérêt de l'inégalité est de fournir une borne sans calculer toute la loi.

$P(|X - 3| \geq 3) \leq \dfrac{2{,}1}{9} \approx 0{,}233$, d'où $P(X \geq 6) \leq 0{,}233$.

Fin du corrigé.