

---

## Corrigé détaillé • Sujet N° 1

Chaque étape justifiée, aucun calcul sous-entendu

---

Voici le corrigé complet du sujet d'entraînement N° 1. Je l'ai rédigé de façon volontairement très détaillée : l'idée n'est pas seulement de donner la bonne réponse, mais de montrer tout le cheminement, comme si je vous l'expliquais au tableau.

Pour vous y retrouver, chaque question suit toujours le même schéma :

- un encadré bleu **Rappel de cours** avec la définition, le théorème ou la méthode utile ;
- la **solution rédigée**, découpée en étapes numérotées où chaque ligne de calcul est justifiée ;
- des encadrés ambrés **Remarque**, **Attention** ou **Vérification** pour l'intuition, les pièges classiques et les contrôles de cohérence ;
- un encadré vert **Conclusion** qui isole le résultat.

Comme dans le sujet, les calculs sont menés sous forme littérale, puis l'application numérique vient en dernier.

Le plus important : ne regardez ce corrigé qu'après avoir vraiment cherché. On apprend bien plus en bloquant d'abord sur une question qu'en lisant la solution tout de suite.

## Exercice I Suites, récurrence et convergence

On étudie les deux suites définies, pour les entiers concernés, par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!} \quad (n \geq 1).$$

**Question 1. Calcul de  $u_3$  et  $v_3$ .**

### Rappel de cours

La **factorielle** d'un entier  $k \geq 1$  est le produit  $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k$ . Par convention,  $0! = 1$ . On a donc  $0! = 1$ ,  $1! = 1$ ,  $2! = 1 \times 2 = 2$ ,  $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ .

Le symbole  $\sum_{k=0}^n$  est une addition : on fait varier  $k$  de 0 jusqu'à  $n$  et on additionne tous les termes obtenus.

**Étape 1 : écrire la somme terme par terme.** Pour  $n = 3$ ,  $k$  prend les valeurs 0, 1, 2, 3 :

$$u_3 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}.$$

**Étape 2 : remplacer chaque factorielle par sa valeur.**

$$u_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

**Étape 3 : additionner les fractions.** Le plus petit dénominateur commun à 1, 2 et 6 est 6. On convertit chaque terme en sixièmes :

$$1 = \frac{6}{6}, \quad 1 = \frac{6}{6}, \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

On additionne les numérateurs :

$$u_3 = \frac{6 + 6 + 3 + 1}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \quad (\text{après simplification par 2}).$$

**Étape 4 : calculer  $v_3$ .** Par définition  $v_3 = u_3 + \frac{1}{3 \cdot 3!}$ . Or  $3 \cdot 3! = 3 \times 6 = 18$ , donc

$$v_3 = \frac{8}{3} + \frac{1}{18}.$$

On met au même dénominateur 18 :  $\frac{8}{3} = \frac{8 \times 6}{18} = \frac{48}{18}$ , d'où

$$v_3 = \frac{48}{18} + \frac{1}{18} = \frac{49}{18}.$$

### Vérification

En valeurs approchées,  $u_3 = \frac{8}{3} \approx 2,667$  et  $v_3 = \frac{49}{18} \approx 2,722$ . La limite cherchée, qui vaut en fait  $e \approx 2,718$ , est bien comprise entre les deux : c'est cohérent avec l'idée que  $(u_n)$  approche  $e$  par en dessous et  $(v_n)$  par au-dessus.

$$u_3 = \frac{8}{3} \approx 2,667 \quad \text{et} \quad v_3 = \frac{49}{18} \approx 2,722, \quad \text{d'où le premier encadrement} \quad \frac{8}{3} < e < \frac{49}{18}.$$

**Question 2. La suite  $(u_n)$  est strictement croissante.**

**Rappel de cours**

Pour déterminer le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$  :

- si  $u_{n+1} - u_n > 0$  pour tout  $n$ , la suite est strictement croissante ;
- si  $u_{n+1} - u_n < 0$  pour tout  $n$ , elle est strictement décroissante.

**Étape 1 : exprimer  $u_{n+1}$ .** La somme  $u_{n+1}$  est la même que  $u_n$ , mais avec un terme supplémentaire, celui correspondant à  $k = n + 1$  :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}}_{= u_n} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

**Étape 2 : calculer la différence.** On soustrait  $u_n$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}.$$

**Étape 3 : conclure sur le signe.** Une factorielle est un produit d'entiers strictement positifs, donc  $(n+1)! > 0$ , et par suite  $\frac{1}{(n+1)!} > 0$ .

**Remarque**

Intuitivement, passer de  $u_n$  à  $u_{n+1}$  revient à ajouter une quantité positive : la somme ne peut donc qu'augmenter.

Pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$  : la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

**Question 3. Sens de variation de  $(v_n)$  (démonstration exigée).**

**Rappel de cours**

On utilisera deux outils :

- la relation  $(n+1)! = (n+1) \times n!$ , conséquence directe de la définition de la factorielle ;
- la mise au même dénominateur pour soustraire des fractions, et la factorisation pour simplifier.

**Étape 1 : écrire la différence.** En remplaçant  $v_{n+1}$  et  $v_n$  par leur définition  $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$  :

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}.$$

D'après la question 2,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ .

**Étape 2 : regrouper les deux termes « positifs ».** On additionne  $\frac{1}{(n+1)!}$  et  $\frac{1}{(n+1)(n+1)!}$  en factorisant par  $\frac{1}{(n+1)!}$  :

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right).$$

Le contenu de la parenthèse se calcule en mettant au même dénominateur :

$$1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Donc cette somme vaut  $\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$ .

**Étape 3 : tout exprimer avec  $n!$ .** Comme  $(n+1)! = (n+1)n!$ , on a  $\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!}$ , d'où

$$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)n!(n+1)} = \frac{n+2}{(n+1)^2 n!}.$$

**Étape 4 : soustraire le dernier terme.** Il reste

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n+2}{(n+1)^2 n!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{1}{n!} \left( \frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \right),$$

où l'on a mis  $\frac{1}{n!}$  en facteur. Pour la parenthèse, le dénominateur commun est  $n(n+1)^2$  :

$$\frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} = \frac{n(n+2)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1)^2}.$$

**Étape 5 : développer le numérateur.**

$$n(n+2) = n^2 + 2n, \quad (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

donc  $n(n+2) - (n+1)^2 = (n^2 + 2n) - (n^2 + 2n + 1) = -1$ . La parenthèse vaut ainsi  $\frac{-1}{n(n+1)^2}$ .

**Étape 6 : rassembler et reconnaître la forme demandée.**

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{-1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2 n!}.$$

Enfin  $(n+1)^2 n! = (n+1) \cdot (n+1)n! = (n+1) \cdot (n+1)!$ , d'où

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}.$$

Tous les facteurs du dénominateur étant strictement positifs, cette différence est strictement négative.

#### Attention

L'erreur classique est de se tromper de signe à l'étape 5, ou d'oublier que  $(n+1)^2 n! = (n+1)(n+1)!$  à l'étape 6. Vérifier l'égalité des dénominateurs avant de conclure évite ce piège.

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 : \text{la suite } (v_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

**Question 4. Limite de  $v_n - u_n$ .**

**Rappel de cours**

Si une suite positive s'écrit  $\frac{1}{w_n}$  avec  $w_n \rightarrow +\infty$ , alors elle tend vers 0 : un nombre fixe divisé par un dénominateur de plus en plus grand devient aussi petit que l'on veut.

**Étape 1 : simplifier  $v_n - u_n$ .** Par définition  $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ , donc

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!}.$$

**Étape 2 : étudier le dénominateur.** Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $n \rightarrow +\infty$  et  $n! \rightarrow +\infty$ , donc le produit  $n \cdot n! \rightarrow +\infty$ .

**Étape 3 : conclure.** L'inverse d'une quantité tendant vers  $+\infty$  tend vers 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \cdot n!} = 0.$$

**Question 5. Convergence vers une même limite et encadrement.**

**Rappel de cours**

**Théorème de convergence monotone :** toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites **adjacentes** lorsque  $(u_n)$  est croissante,  $(v_n)$  décroissante, et  $v_n - u_n \rightarrow 0$ . Elles convergent alors vers une même limite  $\ell$ , avec  $u_n \leq \ell \leq v_n$  pour tout  $n$ .

Enfin, si une suite est *strictement* croissante et converge vers  $\ell$ , chacun de ses termes est strictement inférieur à  $\ell$  (et symétriquement pour une suite strictement décroissante).

**Étape 1 :  $(u_n)$  est croissante.** C'est la question 2.

**Étape 2 :  $(u_n)$  est majorée.** Comme  $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} > 0$ , on a  $u_n < v_n$ . De plus  $(v_n)$  est décroissante (question 3), donc  $v_n \leq v_1$ . Calculons  $v_1$  : d'abord  $u_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 1 + 1 = 2$ , puis

$$v_1 = u_1 + \frac{1}{1 \cdot 1!} = 2 + 1 = 3.$$

On obtient ainsi, pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n < v_n \leq v_1 = 3$ , donc  $u_n < 3$  : la suite  $(u_n)$  est majorée par 3.

**Étape 3 :  $(u_n)$  converge.** Croissante et majorée, elle converge vers une limite  $\ell$  (théorème de convergence monotone).

**Étape 4 :  $(v_n)$  converge.** Elle est décroissante (question 3) et minorée (par exemple par  $u_1 = 2$ , car  $v_n > u_n \geq u_1$ ), donc elle converge vers une limite  $\ell'$ .

**Étape 5 : les deux limites sont égales.** En passant à la limite dans  $v_n - u_n$ , on obtient  $\ell' - \ell = \lim(v_n - u_n) = 0$  (question 4), donc  $\ell' = \ell$ . Les deux suites convergent vers le même réel  $\ell$ .

**Étape 6 : encadrement strict.** La suite  $(u_n)$  est strictement croissante de limite  $\ell$ , donc  $u_n < \ell$  ; la suite  $(v_n)$  est strictement décroissante de limite  $\ell$ , donc  $\ell < v_n$ . D'où  $u_n < \ell < v_n$ .

**Remarque**

On dit que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes. La limite commune est le célèbre nombre  $\ell = e$ . La question suivante montre comment l'encadrer aussi précisément que voulu.

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une même limite  $\ell$ , et pour tout  $n \geq 1$  :  $u_n < \ell < v_n$ .

### Question 6. Lecture de l'algorithme.

#### Rappel de cours

Dans une boucle `while condition:`, le bloc indenté est répété tant que la condition est vraie ; dès qu'elle devient fausse, on sort de la boucle et on exécute `return`. La fonction `factorial(n)` renvoie  $n!$ .

**a) Ce que renvoie rang(p).** La quantité testée  $\frac{1}{n \cdot n!}$  est exactement  $v_n - u_n$  (question 4). La boucle augmente  $n$  de 1 tant que  $v_n - u_n \geq 10^{-p}$ , et s'arrête au premier rang où  $v_n - u_n < 10^{-p}$ . La fonction renvoie donc le plus petit entier  $n \geq 1$  tel que  $v_n - u_n < 10^{-p}$ , c'est-à-dire le premier rang à partir duquel l'encadrement  $u_n < \ell < v_n$  a une amplitude inférieure à  $10^{-p}$ .

**b) Valeur de rang(3).** On calcule  $\frac{1}{n \cdot n!}$  jusqu'à passer sous  $10^{-3} = 0,001$ . On calcule d'abord chaque produit  $n \cdot n!$  :

$n$	$n!$	$n \cdot n!$	$\frac{1}{n \cdot n!}$
1	1	1	1
2	2	4	0,25
3	6	18	$\approx 0,0556$
4	24	96	$\approx 0,0104$
5	120	600	$\approx 0,00167$
6	720	4320	$\approx 0,000231$

Pour  $n = 5$ , la valeur 0,00167 est encore supérieure à 0,001 ; pour  $n = 6$ , la valeur 0,000231 est strictement inférieure à 0,001. Le premier rang qui convient est donc  $n = 6$  : **rang(3) = 6**.

**Encadrement obtenu.** L'amplitude vaut  $v_6 - u_6 = \frac{1}{4320} \approx 2,3 \times 10^{-4} < 10^{-3}$ . Numériquement, en additionnant  $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720}$ , on trouve  $u_6 \approx 2,71806$  et  $v_6 = u_6 + \frac{1}{4320} \approx 2,71829$ .

#### Vérification

On obtient  $2,71806 < \ell < 2,71829$ . On reconnaît bien  $\ell = e \approx 2,71828$ , qui est effectivement dans cet intervalle.

**rang(3) = 6**, d'où  $2,71806 < \ell < 2,71829$ , ce qui confirme  $\ell = e$ .

## Exercice II Fonction logarithme, dérivation, convexité et continuité

Fonction étudiée :  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , définie sur  $]0; +\infty[$ . On note  $\mathcal{C}$  sa courbe.

### Question 1. Limites et asymptotes.

#### Rappel de cours

**Comportement de  $\ln$  :**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .

**Croissance comparée :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ; au voisinage de  $+\infty$ , le dénominateur  $x$  « grandit plus vite » que  $\ln x$ .

**Asymptotes :** si  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  quand  $x \rightarrow a$ , la droite  $x = a$  est asymptote verticale; si  $f(x) \rightarrow L$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , la droite  $y = L$  est asymptote horizontale.

**Limite en  $0^+$ .** On écrit  $f$  comme un produit :

$$f(x) = \ln x \times \frac{1}{x}.$$

Quand  $x \rightarrow 0^+$  :  $\ln x \rightarrow -\infty$  et  $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ . Le produit d'une quantité tendant vers  $-\infty$  par une quantité tendant vers  $+\infty$  tend vers  $-\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

La courbe  $\mathcal{C}$  admet donc la droite  $x = 0$  (axe des ordonnées) pour asymptote verticale.

**Limite en  $+\infty$ .** C'est exactement la croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

La droite  $y = 0$  (axe des abscisses) est donc asymptote horizontale en  $+\infty$ .

#### Attention

Il ne faut pas confondre  $\frac{\ln x}{x}$ , qui tend vers 0, avec  $\frac{x}{\ln x}$ , qui tend vers  $+\infty$ . Dans une croissance comparée, c'est toujours la puissance de  $x$  qui l'emporte sur le logarithme.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ (asymptote verticale } x = 0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ (asymptote horizontale } y = 0).$$

### Question 2. Dérivée, variations et maximum.

#### Rappel de cours

**Dérivée d'un quotient :**  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ .

On rappelle que  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  et  $(x)' = 1$ . Le signe de  $f'$  donne le sens de variation; là où  $f'$  s'annule en changeant de signe,  $f$  a un extremum.

**Étape 1 : identifier  $u$  et  $v$ .** Ici  $u = \ln x$  (donc  $u' = \frac{1}{x}$ ) et  $v = x$  (donc  $v' = 1$ ).

**Étape 2 : appliquer la formule.**

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

car  $\frac{1}{x} \times x = 1$ .

**Étape 3 : étudier le signe.** Pour  $x > 0$ , le dénominateur  $x^2$  est strictement positif. Le signe de  $f'(x)$  est donc celui du numérateur  $1 - \ln x$  :

$$1 - \ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e,$$

la dernière équivalence venant du fait que  $\ln$  est croissante et  $\ln e = 1$ . De même  $1 - \ln x = 0 \iff x = e$  et  $1 - \ln x < 0 \iff x > e$ .

**Étape 4 : variations et maximum.** La fonction croît sur  $]0; e]$  puis décroît sur  $[e; +\infty[$ . Elle atteint donc un maximum en  $x = e$ , valant

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}.$$

$x$	0	e	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
$f$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

#### Remarque

Le maximum vaut  $\frac{1}{e} \approx 0,368$ . C'est cette valeur qui jouera le rôle de « plafond » dans la discussion de la question 4.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}; f \text{ admet un maximum en } x = e, \text{ égal à } \frac{1}{e}.$$

**Question 3. Convexité et point d'inflexion.**

#### Rappel de cours

$f$  est **convexe** là où  $f'' > 0$ , **concave** là où  $f'' < 0$ . Un **point d'inflexion** est un point où  $f''$  s'annule *en changeant de signe*.

**Dérivée d'un produit :**  $(uv)' = u'v + uv'$ . On rappelle aussi  $(x^{-2})' = -2x^{-3}$ .

**Étape 1 : réécrire  $f'$  comme un produit.**

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = (1 - \ln x)x^{-2}.$$

On pose  $u = 1 - \ln x$  (donc  $u' = -\frac{1}{x}$ ) et  $v = x^{-2}$  (donc  $v' = -2x^{-3}$ ).

**Étape 2 : dériver le produit.**

$$f''(x) = u'v + uv' = \left(-\frac{1}{x}\right)x^{-2} + (1 - \ln x)(-2x^{-3}).$$

**Étape 3 : simplifier.** Le premier terme vaut  $-x^{-3}$ . On met  $x^{-3}$  en facteur :

$$f''(x) = x^{-3}[-1 - 2(1 - \ln x)] = x^{-3}[-1 - 2 + 2\ln x] = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

**Étape 4 : étudier le signe.** Pour  $x > 0$ ,  $x^3 > 0$ , donc le signe de  $f''$  est celui de  $2 \ln x - 3$  :

$$2 \ln x - 3 > 0 \iff \ln x > \frac{3}{2} \iff x > e^{3/2}.$$

**Étape 5 : conclure.**  $f'' < 0$  sur  $]0; e^{3/2}[$  (concave) et  $f'' > 0$  sur  $]e^{3/2}; +\infty[$  (convexe). En  $x = e^{3/2}$ ,  $f''$  change de signe : la courbe y présente un point d'inflexion.

#### Remarque

On a  $e^{3/2} = e\sqrt{e} \approx 4,48$ . La courbe « tourne sa courbure » à cet endroit, ce qui se voit sur le graphique du sujet.

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}; \text{ unique point d'inflexion, d'abscisse } x = e^{3/2}.$$

**Question 4. Nombre de solutions de  $f(x) = c$ .**

#### Rappel de cours

**Théorème des valeurs intermédiaires, version bijective :** si  $f$  est continue et *strictement monotone* sur un intervalle, alors pour toute valeur  $c$  comprise entre les valeurs (ou limites) aux bornes, l'équation  $f(x) = c$  admet *une unique* solution dans cet intervalle.

Graphiquement, le nombre de solutions de  $f(x) = c$  est le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec la droite horizontale d'équation  $y = c$ .

D'après le tableau de variations, on découpe  $]0; +\infty[$  en deux morceaux :

- sur  $]0; e]$ ,  $f$  est continue et strictement croissante, de  $\lim_{0^+} f = -\infty$  à  $f(e) = \frac{1}{e}$ ;
- sur  $[e; +\infty[$ ,  $f$  est continue et strictement décroissante, de  $\frac{1}{e}$  à  $\lim_{+\infty} f = 0$  (valeur non atteinte).

On discute alors selon la position de  $c$  par rapport aux valeurs remarquables  $\frac{1}{e}$  et  $0$  :

- $c > \frac{1}{e}$  :  $c$  est au-dessus du maximum, la courbe ne l'atteint jamais. *Aucune* solution.
- $c = \frac{1}{e}$  : seul le sommet convient. *Une* solution,  $x = e$ .
- $0 < c < \frac{1}{e}$  : sur la branche croissante (de  $-\infty$  à  $\frac{1}{e}$ ),  $c$  est atteint une fois; sur la branche décroissante (de  $\frac{1}{e}$  à  $0$ ),  $c$  est encore atteint une fois. *Deux* solutions.
- $c = 0$  :  $f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$ . Sur la branche de droite  $f$  reste strictement positive, donc ne s'annule pas. *Une* solution.
- $c < 0$  :  $f$  n'est négative que pour  $x < 1$  (là où  $\ln x < 0$ ), sur la branche croissante parcourue une seule fois de  $-\infty$  à  $0$ . *Une* solution.

Nombre de solutions de  $f(x) = c$  : 0 si  $c > \frac{1}{e}$ ; 1 si  $c = \frac{1}{e}$ ; 2 si  $0 < c < \frac{1}{e}$ ; 1 si  $c \leq 0$ .

**Question 5. Comparaison de  $e^\pi$  et  $\pi^e$  (démonstration exigée).**

#### Rappel de cours

La fonction  $\ln$  est **strictement croissante** : pour  $A, B > 0$ ,  $A > B \iff \ln A > \ln B$  (appliquer  $\ln$  ne change pas le sens d'une inégalité entre nombres positifs). On utilise aussi  $\ln(a^b) = b \ln a$  et  $\ln e = 1$ .

**a) Démonstration de l'équivalence.**

**Étape 1 : appliquer  $\ln$ .** Les deux nombres sont strictement positifs, donc

$$e^\pi > \pi^e \iff \ln(e^\pi) > \ln(\pi^e).$$

**Étape 2 : utiliser  $\ln(a^b) = b \ln a$ .** Comme  $\ln(e^\pi) = \pi \ln e = \pi$  et  $\ln(\pi^e) = e \ln \pi$  :

$$e^\pi > \pi^e \iff \pi > e \ln \pi.$$

**Étape 3 : diviser par  $e\pi > 0$ .** Diviser les deux membres par un nombre strictement positif ne change pas le sens de l'inégalité :

$$\pi > e \ln \pi \iff \frac{\pi}{e\pi} > \frac{e \ln \pi}{e\pi} \iff \frac{1}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}.$$

**Étape 4 : reconnaître  $f$ .** Or  $\frac{1}{e} = f(e)$  et  $\frac{\ln \pi}{\pi} = f(\pi)$ . Donc

$$e^\pi > \pi^e \iff f(e) > f(\pi).$$

**b) Conclusion.** On a  $\pi \approx 3,14 > e \approx 2,72$ . Comme  $f$  est strictement décroissante sur  $[e; +\infty[$  (question 2), des abscisses plus grandes donnent des images plus petites :  $f(\pi) < f(e)$ , c'est-à-dire  $f(e) > f(\pi)$ . D'après l'équivalence de la partie a), on conclut.

#### Remarque

La méthode est générale : pour comparer  $a^b$  et  $b^a$  (avec  $a, b > 0$ ), il suffit de comparer  $\frac{\ln a}{a}$  et  $\frac{\ln b}{b}$ , donc d'utiliser les variations de  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ .

$f(e) > f(\pi)$ , donc  $e^\pi > \pi^e$ .

**Question 6. Calcul de  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ .**

#### Rappel de cours

Si  $u$  est une fonction dérivable, alors  $u' u$  a pour primitive  $\frac{u^2}{2}$  (c'est la dérivée « à l'envers » de  $\frac{u^2}{2}$ , dont la dérivée est  $u'u$ ).

**Théorème fondamental :** si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ .

**Étape 1 : reconnaître la forme  $u'u$ .** On écrit

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x.$$

En posant  $u = \ln x$ , on a  $u' = \frac{1}{x}$ , donc  $\frac{\ln x}{x} = u' u$ .

**Étape 2 : déterminer une primitive.** D'après le rappel, une primitive de  $f$  est

$$F(x) = \frac{u^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}.$$

**Étape 3 : appliquer le théorème fondamental.**

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

(On a utilisé  $\ln e = 1$  et  $\ln 1 = 0$ .)

**Étape 4 : interprétation géométrique.** Sur  $[1; e]$ , on a  $x \geq 1$  donc  $\ln x \geq 0$  et  $f(x) \geq 0$ . L'intégrale d'une fonction positive représente une aire : ici, celle de la région délimitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites  $x = 1$  et  $x = e$ .

**Vérification**

Le fait que  $f \geq 0$  sur  $[1; e]$  est essentiel pour parler d'aire : si la fonction changeait de signe, l'intégrale ne serait plus directement l'aire.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} : \text{l'aire sous } \mathcal{C} \text{ entre } x = 1 \text{ et } x = e \text{ vaut } \frac{1}{2} \text{ unité d'aire.}$$

### Exercice III Fonction exponentielle et équations différentielles

Modèle : (E)  $T'(t) = -0,2(T(t) - 20)$ , avec  $T(0) = 90$ .  $T(t)$  est la température (en °C) à l'instant  $t$  (en minutes).

**Question 1. Mise sous la forme  $T' = aT + b$ .**

#### Rappel de cours

« Sous la forme  $T' = aT + b$  » signifie que l'on développe le second membre pour faire apparaître un terme proportionnel à  $T$  (coefficient  $a$ ) et une constante ( $b$ ).

On développe le produit :

$$T'(t) = -0,2(T(t) - 20) = -0,2T(t) \underbrace{-0,2 \times (-20)}_{=+4} = -0,2T(t) + 4.$$

#### Remarque

Le coefficient  $a = -0,2$  est négatif : c'est le signe d'un phénomène de retour vers un équilibre (ici, le refroidissement vers la température de la pièce).

$$T' = aT + b \text{ avec } a = -0,2 \text{ et } b = 4.$$

**Question 2. Solutions générales de  $T' = aT + b$ .**

#### Rappel de cours

**Cours :** pour  $a \neq 0$ , les solutions de l'équation différentielle  $y' = ay + b$  sont les fonctions

$$y(t) = K e^{at} - \frac{b}{a}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Le terme constant  $-\frac{b}{a}$  est la *solution d'équilibre*, celle pour laquelle  $y' = 0$ .

**Étape 1 : repérer  $a$  et  $b$ .** D'après la question 1,  $a = -0,2$  et  $b = 4$ .

**Étape 2 : calculer la solution d'équilibre.**

$$-\frac{b}{a} = -\frac{4}{-0,2} = 20.$$

**Étape 3 : écrire les solutions.**

$$T(t) = K e^{-0,2t} + 20, \quad K \in \mathbb{R}.$$

#### Remarque

La constante 20 correspond bien à la température de la pièce : si le liquide est déjà à 20 °C, il n'évolue plus, ce qui est physiquement attendu.

$$T(t) = K e^{-0,2t} + 20, \text{ avec } K \text{ réel quelconque.}$$

**Question 3. Solution vérifiant  $T(0) = 90$  (démonstration exigée).**

**Rappel de cours**

La condition initiale fixe la valeur en  $t = 0$ . On remplace  $t$  par 0 dans la solution générale, on utilise  $e^0 = 1$ , puis on résout pour trouver  $K$ .

**Étape 1 : écrire  $T(0)$ .**

$$T(0) = K e^{-0,2 \times 0} + 20 = K e^0 + 20 = K + 20.$$

**Étape 2 : imposer la condition.**

$$T(0) = 90 \iff K + 20 = 90 \iff K = 70.$$

**Étape 3 : écrire la solution.**

$$T(t) = 70 e^{-0,2t} + 20 = 20 + 70 e^{-0,2t}.$$

**Vérification**

$T(0) = 20 + 70 \times 1 = 90$  : la condition initiale est bien respectée.

$$T(t) = 20 + 70 e^{-0,2t}.$$

**Question 4. Limite en  $+\infty$  et interprétation.**

**Rappel de cours**

Pour  $a < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} = 0$  (l'exponentielle d'un nombre de plus en plus « grand négatif » tend vers 0). Ici  $a = -0,2 < 0$ .

Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $e^{-0,2t} \rightarrow 0$ , donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 20 + 70 \times 0 = 20.$$

Physiquement, le liquide finit par se mettre à la température de la pièce.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 20^\circ\text{C}$  : à long terme, le liquide atteint la température ambiante.

**Question 5. Sens de variation.**

**Rappel de cours**

$(e^u)' = u' e^u$ . Le signe de  $T'$  donne le sens de variation de  $T$ .

**Étape 1 : dériver.** Avec  $u = -0,2t$ ,  $u' = -0,2$  :

$$T'(t) = 70 \times (-0,2) e^{-0,2t} = -14 e^{-0,2t}.$$

**Étape 2 : signe.** L'exponentielle  $e^{-0,2t}$  est strictement positive, et  $-14 < 0$ , donc  $T'(t) < 0$  pour tout  $t$ .

**Remarque**

Une fonction strictement décroissante pour décrire un refroidissement : c'est cohérent avec l'intuition.

$$T'(t) = -14 e^{-0,2t} < 0 : T \text{ est strictement décroissante sur } [0; +\infty[.$$

**Question 6. Valeur de  $T'(0)$ .**

**Rappel de cours**

Le nombre dérivé  $T'(0)$  est la **vitesse instantanée** de variation de la température à l'instant initial, en degrés par minute.

D'après la question 5 :

$$T'(0) = -14e^{-0,2 \times 0} = -14e^0 = -14.$$

$T'(0) = -14$  °C/min : au départ, le liquide perd 14 degrés par minute.

**Question 7. Instant où  $T = 50$  °C.**

**Rappel de cours**

Pour résoudre une équation avec exponentielle, on l'**isole** puis on applique  $\ln$  :  $e^X = A \iff X = \ln A$  (pour  $A > 0$ ). On rappelle  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ , donc  $\ln\frac{3}{7} = -\ln\frac{7}{3}$ .

**Étape 1 : isoler l'exponentielle.**

$$20 + 70e^{-0,2t} = 50 \iff 70e^{-0,2t} = 30 \iff e^{-0,2t} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}.$$

**Étape 2 : appliquer  $\ln$ .**

$$-0,2t = \ln\frac{3}{7}.$$

**Étape 3 : isoler  $t$ .**

$$t = \frac{\ln(3/7)}{-0,2} = -5 \ln\frac{3}{7} = 5 \ln\frac{7}{3}.$$

**Application numérique.**  $\ln\frac{7}{3} \approx 0,847$ , donc  $t \approx 5 \times 0,847 \approx 4,24$  minutes.

**Vérification**

$T(4,24) \approx 20 + 70e^{-0,848} \approx 20 + 70 \times 0,428 \approx 50$ . C'est bien 50 °C.

$$t = 5 \ln\frac{7}{3} \approx 4,24 \text{ minutes.}$$

**Question 8. Température moyenne sur  $[0; 10]$ .**

**Rappel de cours**

**Valeur moyenne** d'une fonction continue sur  $[a; b]$  :  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ .

Une primitive de  $t \mapsto e^{at}$  est  $\frac{1}{a} e^{at}$ .

**Étape 1 : primitive de  $T$ .** Comme  $\frac{70}{-0,2} = -350$ , une primitive de  $T(t) = 20 + 70e^{-0,2t}$  est

$$\mathcal{T}(t) = 20t - 350e^{-0,2t}.$$

**Étape 2 : calculer l'intégrale.**

$$\int_0^{10} T(t) dt = \left[ 20t - 350e^{-0,2t} \right]_0^{10} = (200 - 350e^{-2}) - (0 - 350e^0).$$

Comme  $e^0 = 1$ , le second crochet vaut  $-350$ , donc

$$\int_0^{10} T(t) dt = 200 - 350e^{-2} + 350 = 550 - 350e^{-2}.$$

**Étape 3 : diviser par la longueur de l'intervalle.**

$$\frac{1}{10} \int_0^{10} T(t) dt = \frac{550 - 350e^{-2}}{10} = 55 - 35e^{-2}.$$

**Application numérique.**  $e^{-2} \approx 0,135$ , donc la moyenne vaut environ  $55 - 35 \times 0,135 \approx 50,26$  °C.

#### Vérification

La température passe de 90 à  $t = 0$  à environ  $T(10) = 20 + 70e^{-2} \approx 29,5$  à  $t = 10$ . Une moyenne d'environ 50 est plausible : elle est tirée vers le haut par le début, où la température est élevée et décroît vite.

Température moyenne =  $55 - 35e^{-2} \approx 50,26$  °C.

### Exercice IV Calcul intégral et suite d'intégrales

Pour tout entier  $n \geq 0$  :  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

**Question 1. Calcul de  $I_0$ .**

#### Rappel de cours

Une primitive de  $\frac{u'}{u}$  est  $\ln|u|$ . Ici  $u = 1+x$ ,  $u' = 1$ , et  $1+x > 0$  sur  $[0; 1]$ , donc une primitive de  $\frac{1}{1+x}$  est  $\ln(1+x)$ .

**Étape 1 : simplifier l'expression pour  $n = 0$ .** Comme  $x^0 = 1$  :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx.$$

**Étape 2 : appliquer la primitive.**

$$I_0 = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(1+1) - \ln(1+0) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2,$$

car  $\ln 1 = 0$ .

$$I_0 = \ln 2.$$

**Question 2. Signe et sens de variation de  $(I_n)$ .**

#### Rappel de cours

**Positivité de l'intégrale :** si  $f(x) \geq 0$  sur  $[a; b]$  avec  $a \leq b$ , alors  $\int_a^b f \geq 0$ .

Pour le sens de variation, on étudie le signe de  $I_{n+1} - I_n$ , que l'on calcule comme l'intégrale de la différence des deux fonctions (par linéarité).

**Positivité.** Sur  $[0; 1]$  :  $x^n \geq 0$  (car  $x \geq 0$ ) et  $1+x > 0$ , donc le quotient  $\frac{x^n}{1+x}$  est positif. Comme les bornes vérifient  $0 \leq 1$ , l'intégrale est positive :  $I_n \geq 0$ .

**Décroissance, étape 1 : écrire la différence.** Par linéarité,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} dx.$$

**Étape 2 : factoriser le numérateur.** On met  $x^n$  en facteur :  $x^{n+1} - x^n = x^n(x-1)$ , donc

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx.$$

**Étape 3 : étudier le signe de l'intégrande.** Sur  $[0; 1]$  :  $x^n \geq 0$ ,  $x-1 \leq 0$  (car  $x \leq 1$ ) et  $1+x > 0$ . Le quotient est donc le produit d'un terme positif, d'un terme négatif et d'un terme positif : il est négatif ou nul. L'intégrale d'une fonction négative est négative :  $I_{n+1} - I_n \leq 0$ .

**Remarque**

Intuitivement, sur  $[0; 1]$  on a  $x^{n+1} \leq x^n$  (élever un nombre entre 0 et 1 à une puissance plus grande le rend plus petit); on intègre donc une fonction plus petite, et  $I_{n+1} \leq I_n$ .

Pour tout  $n$ ,  $I_n \geq 0$  et  $I_{n+1} \leq I_n$  : la suite  $(I_n)$  est positive et décroissante.

**Question 3. Encadrement et limite (démonstration exigée).****Rappel de cours**

**Comparaison** : si  $f \leq g$  sur  $[a; b]$ , alors  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

**Théorème des gendarmes** : si  $a_n \leq I_n \leq b_n$  et si  $a_n$  et  $b_n$  tendent vers la même limite  $\ell$ , alors  $I_n \rightarrow \ell$ .

On utilisera aussi  $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ .

**Étape 1 : encadrer la fonction intégrée.** Sur  $[0; 1]$ , on a  $1+x \geq 1$ , donc en prenant les inverses (la fonction inverse est décroissante sur les réels positifs)  $\frac{1}{1+x} \leq 1$ . En multipliant par  $x^n \geq 0$  (ce qui ne change pas le sens) :

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n.$$

**Étape 2 : intégrer l'encadrement.** L'intégration conserve les inégalités entre fonctions :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx.$$

**Étape 3 : calculer la borne de droite.**

$$\int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}.$$

On a donc  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

**Étape 4 : passer à la limite.** Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ , et la borne de gauche est constante égale à 0. Par le théorème des gendarmes,  $I_n \rightarrow 0$ .

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

**Question 4. Relation**  $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ .

**Rappel de cours**

**Linéarité** :  $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ . On simplifie d'abord l'intégrande grâce à l'indication  $x^n + x^{n+1} = x^n(1+x)$ .

**Étape 1 : regrouper les deux intégrales.**

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx.$$

**Étape 2 : simplifier l'intégrande.** On factorise  $x^n + x^{n+1} = x^n(1+x)$ , puis on simplifie par  $1+x$  (non nul) :

$$\frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} = \frac{x^n(1+x)}{1+x} = x^n.$$

**Étape 3 : calculer.**

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Pour tout  $n \geq 0$ ,  $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ .

**Question 5. Récurrence :**  $I_n = (-1)^n(\ln 2 - S_n)$  (démonstration exigée).

**Rappel de cours**

**Raisonnement par récurrence :** on vérifie la propriété au rang de départ (*initialisation*), puis on montre que « vraie au rang  $n$  » entraîne « vraie au rang  $n+1$  » (*hérédité*).

On utilisera  $S_{n+1} = S_n + \frac{(-1)^n}{n+1}$  (le terme ajouté est celui d'indice  $n+1$ ) et  $(-1)^{n+1} \times (-1)^n = (-1)^{2n+1} = -1$ .

**Initialisation ( $n=1$ ).** D'une part, la relation de la question 4 au rang 0 donne  $I_0 + I_1 = \frac{1}{0+1} = 1$ , donc  $I_1 = 1 - I_0 = 1 - \ln 2$ . D'autre part,  $S_1 = \frac{(-1)^0}{1} = 1$ , et

$$(-1)^1(\ln 2 - S_1) = -(\ln 2 - 1) = 1 - \ln 2.$$

Les deux quantités sont égales : la propriété est vraie au rang 1.

**Hérédité.** Supposons  $I_n = (-1)^n(\ln 2 - S_n)$  pour un certain  $n \geq 1$  (hypothèse de récurrence). La question 4 donne  $I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n$ , donc, en remplaçant  $I_n$  par l'hypothèse,

$$I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - (-1)^n(\ln 2 - S_n). \quad (*)$$

Calculons à part l'expression visée au rang  $n+1$ . Comme  $\ln 2 - S_{n+1} = (\ln 2 - S_n) - \frac{(-1)^n}{n+1}$ , on a

$$(-1)^{n+1}(\ln 2 - S_{n+1}) = (-1)^{n+1}(\ln 2 - S_n) - \underbrace{(-1)^{n+1}(-1)^n}_{=-1} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Le premier terme vaut  $(-1)^{n+1}(\ln 2 - S_n) = -(-1)^n(\ln 2 - S_n)$ , et le second vaut  $+\frac{1}{n+1}$ . Donc

$$(-1)^{n+1}(\ln 2 - S_{n+1}) = \frac{1}{n+1} - (-1)^n(\ln 2 - S_n).$$

On reconnaît exactement le membre de droite de (\*), donc  $(-1)^{n+1}(\ln 2 - S_{n+1}) = I_{n+1}$  : la propriété est vraie au rang  $n+1$ .

**Conclusion.** Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $I_n = (-1)^n(\ln 2 - S_n)$ .

**Question 6. Limite de  $(S_n)$ .**

**Rappel de cours**

$|(-1)^n| = 1$  pour tout  $n$ . Si  $I_n \rightarrow 0$ , alors  $|I_n| \rightarrow 0$ .

**Étape 1 : isoler  $\ln 2 - S_n$ .** D'après la question 5,

$$|I_n| = |(-1)^n| \cdot |\ln 2 - S_n| = |\ln 2 - S_n|.$$

**Étape 2 : passer à la limite.** Comme  $I_n \rightarrow 0$  (question 3), on a  $|I_n| \rightarrow 0$ , donc  $|\ln 2 - S_n| \rightarrow 0$ , ce qui signifie  $S_n \rightarrow \ln 2$ .

**Remarque**

On vient d'établir un résultat célèbre : la somme alternée des inverses des entiers converge vers  $\ln 2$ , autrement dit  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2.$$

### Exercice V Géométrie de l'espace, produit scalaire et distances

Cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1 :  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,  $C(1, 1, 0)$ ,  $D(0, 1, 0)$ ,  $E(0, 0, 1)$ ,  $F(1, 0, 1)$ ,  $G(1, 1, 1)$ ,  $H(0, 1, 1)$ .

#### Question 1. Vecteur normal au plan $(BDE)$ .

##### Rappel de cours

Dans un repère orthonormé,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ , et deux vecteurs sont orthogonaux quand leur produit scalaire est nul.

Un **vecteur normal** à un plan est un vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

#### Étape 1 : deux vecteurs du plan.

$$\overrightarrow{BD} = D - B = (0 - 1, 1 - 0, 0 - 0) = (-1, 1, 0), \quad \overrightarrow{BE} = E - B = (0 - 1, 0 - 0, 1 - 0) = (-1, 0, 1).$$

#### Étape 2 : poser les conditions d'orthogonalité. On cherche $\vec{n} = (a, b, c)$ tel que

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \implies -a + b = 0 \implies b = a, \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \implies -a + c = 0 \implies c = a.$$

**Étape 3 : choisir une valeur.** En prenant  $a = 1$ , on obtient  $\vec{n} = (1, 1, 1)$ . (Les vecteurs  $\overrightarrow{BD}$  et  $\overrightarrow{BE}$  ne sont pas colinéaires, donc le plan est bien défini.)

##### Vérification

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = -1 + 0 + 1 = 0 : \vec{n} \text{ est bien orthogonal aux deux vecteurs.}$$

Un vecteur normal au plan  $(BDE)$  est  $\vec{n} = (1, 1, 1)$ .

#### Question 2. Équation cartésienne de $(BDE)$ .

##### Rappel de cours

Un plan de vecteur normal  $(a, b, c)$  a une équation de la forme  $ax + by + cz + d = 0$ . La constante  $d$  se trouve en écrivant qu'un point connu du plan vérifie l'équation.

**Étape 1 : forme de l'équation.** Avec  $\vec{n} = (1, 1, 1)$ , l'équation s'écrit  $x + y + z + d = 0$ .

**Étape 2 : déterminer  $d$ .** Le point  $B(1, 0, 0)$  appartient au plan, donc

$$1 + 0 + 0 + d = 0 \implies d = -1.$$

**Étape 3 : écrire l'équation.**  $x + y + z - 1 = 0$ , soit  $x + y + z = 1$ .

##### Vérification

$$D(0, 1, 0) : 0 + 1 + 0 = 1 ; E(0, 0, 1) : 0 + 0 + 1 = 1. \text{ Les trois points } B, D, E \text{ vérifient l'équation.}$$

Une équation cartésienne de  $(BDE)$  est  $x + y + z - 1 = 0$ , soit  $x + y + z = 1$ .

#### Question 3. Distance de $G$ au plan $(BDE)$ .

**Rappel de cours**

**Distance d'un point au plan :** pour  $M(x_0, y_0, z_0)$  et le plan  $ax + by + cz + d = 0$ ,

$$d(M, \text{plan}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

On évite ensuite un radical au dénominateur en multipliant haut et bas par ce radical.

Avec  $G(1, 1, 1)$  et le plan  $x + y + z - 1 = 0$  (ici  $a = b = c = 1$ ,  $d = -1$ ) :

$$d(G, (BDE)) = \frac{|1 + 1 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On rationalise :  $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

$$d(G, (BDE)) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

**Question 4.**  $(AG)$  orthogonale à  $(BDE)$  (démonstration exigée).

**Rappel de cours**

Une droite est **orthogonale** à un plan si et seulement si l'un de ses vecteurs directeurs est colinéaire à un vecteur normal du plan.

Un vecteur directeur de  $(AG)$  est  $\overrightarrow{AG} = G - A = (1, 1, 1)$ . Or c'est précisément le vecteur normal  $\vec{n} = (1, 1, 1)$  du plan  $(BDE)$  trouvé à la question 1. Le vecteur directeur de la droite est donc colinéaire (ici même égal) à un vecteur normal du plan.

$$\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1) = \vec{n} : \text{la droite } (AG) \text{ est orthogonale au plan } (BDE).$$

**Question 5.** Représentation paramétrique de  $(AG)$  et point  $I$ .

**Rappel de cours**

La droite passant par  $A$  de vecteur directeur  $\overrightarrow{AG}$  est l'ensemble des points  $M = A + t\overrightarrow{AG}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Pour trouver son intersection avec un plan, on reporte les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan.

**Étape 1 : représentation paramétrique.** Avec  $A(0, 0, 0)$  et  $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$  :

$$(AG) : \begin{cases} x = 0 + t \times 1 = t \\ y = 0 + t \times 1 = t \\ z = 0 + t \times 1 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

**Étape 2 : intersection avec le plan.** On reporte  $x = y = z = t$  dans  $x + y + z = 1$  :

$$t + t + t = 1 \iff 3t = 1 \iff t = \frac{1}{3}.$$

**Étape 3 : coordonnées de  $I$ .** On remplace  $t = \frac{1}{3}$  :  $I\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

$$(AG) : (x, y, z) = (t, t, t); \text{ le point d'intersection est } I\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

**Question 6. Triangle  $BDE$  équilatéral et son aire.****Rappel de cours**Longueur d'un vecteur :  $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .Aire d'un triangle équilatéral de côté  $c$  :  $\frac{\sqrt{3}}{4} c^2$ .**Étape 1 : longueur des trois côtés.**

$$BD = \|(-1, 1, 0)\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad BE = \|(-1, 0, 1)\| = \sqrt{2},$$

$$DE = \|E - D\| = \|(0, -1, 1)\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

**Étape 2 : nature du triangle.** Les trois côtés ont la même longueur  $\sqrt{2}$  : le triangle  $BDE$  est équilatéral.

**Étape 3 : aire.**

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$BDE$  est équilatéral de côté  $\sqrt{2}$ , d'aire  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Question 7. Volume du tétraèdre  $ABDE$  (deux méthodes).****Rappel de cours**

**Volume d'un tétraèdre :**  $V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times (\text{hauteur})$ , la hauteur étant la distance du sommet opposé au plan de la base.

**a) Méthode directe.** On choisit pour base le triangle  $ABD$ , contenu dans le plan  $z = 0$ . Comme  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,  $D(0, 1, 0)$ , ce triangle est rectangle en  $A$  avec  $AB = AD = 1$  ; son aire vaut

$$\frac{1}{2} \times AB \times AD = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}.$$

Le sommet restant  $E(0, 0, 1)$  est à la hauteur  $z = 1$  au-dessus du plan  $z = 0$ . Donc

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

**b) Méthode avec le plan ( $BDE$ ).** On prend cette fois pour base le triangle  $BDE$ , d'aire  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (question 6). La hauteur est la distance de  $A$  au plan ( $BDE$ ) :

$$d(A, (BDE)) = \frac{|0 + 0 + 0 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Alors

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

**Vérification**

Les deux méthodes donnent le même volume  $\frac{1}{6}$ , ce qui confirme à la fois l'aire de  $BDE$  et la distance de  $A$  au plan.

$$V_{ABDE} = \frac{1}{6} \text{ (confirmé par les deux méthodes).}$$

**Question 8. Plan  $(CFH)$  parallèle à  $(BDE)$  et distance.****Rappel de cours**

Deux plans sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires. La distance entre deux plans parallèles est la distance d'un point quelconque de l'un au plan de l'autre.

**Étape 1 : vecteur normal de  $(CFH)$ .** Avec  $C(1, 1, 0)$  :

$$\overrightarrow{CF} = F - C = (0, -1, 1), \quad \overrightarrow{CH} = H - C = (-1, 0, 1).$$

Un vecteur  $\vec{m} = (a, b, c)$  orthogonal aux deux vérifie  $-b + c = 0$  (donc  $c = b$ ) et  $-a + c = 0$  (donc  $a = c$ ), d'où  $a = b = c$  : on prend  $\vec{m} = (1, 1, 1)$ .

**Étape 2 : parallélisme.** C'est le même vecteur normal que celui de  $(BDE)$  : les deux plans sont parallèles.

**Étape 3 : équation de  $(CFH)$ .** De la forme  $x + y + z + d = 0$  ; comme  $C(1, 1, 0)$  y appartient,  $1 + 1 + 0 + d = 0$  donne  $d = -2$ , soit  $x + y + z = 2$ .

**Étape 4 : distance entre les plans.** On prend un point de  $(CFH)$ , par exemple  $C(1, 1, 0)$ , et on calcule sa distance à  $(BDE)$  :

$$d(C, (BDE)) = \frac{|1 + 1 + 0 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$(CFH) : x + y + z = 2$  est parallèle à  $(BDE)$ , et la distance entre les deux plans vaut  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

## Exercice VI Probabilités conditionnelles et loi binomiale

$M$  : « la personne est malade » ( $P(M) = 0,02$ ) ;  $T$  : « le test est positif ». Données :  $P_M(T) = 0,99$  (si malade, test positif à 99 %) et  $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,95$  (si non malade, test négatif à 95 %).

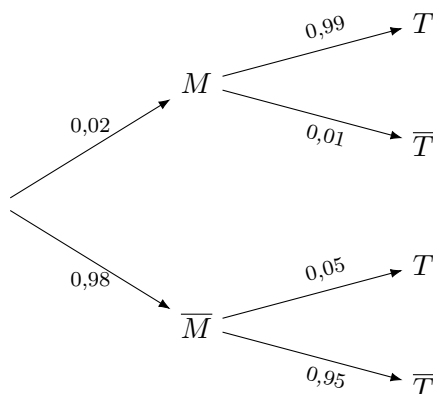
### Question 1. Arbre pondéré complété.

#### Rappel de cours

Sur un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1. Cela permet de déduire les branches non données.

#### Branches manquantes.

- Premier niveau :  $P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0,02 = 0,98$ .
- Sous  $M$  :  $P_M(\bar{T}) = 1 - P_M(T) = 1 - 0,99 = 0,01$ .
- Sous  $\bar{M}$  : on connaît  $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,95$ , donc  $P_{\bar{M}}(T) = 1 - 0,95 = 0,05$ .



### Question 2. Probabilité que la personne soit malade et le test positif.

#### Rappel de cours

La probabilité d'un chemin de l'arbre est le **produit** des probabilités rencontrées :  $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T)$ .

On multiplie les probabilités le long du chemin  $M \rightarrow T$  :

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198.$$

$$P(M \cap T) = 0,0198.$$

### Question 3. Calcul de $P(T)$ (démonstration exigée).

#### Rappel de cours

**Formule des probabilités totales** : comme  $M$  et  $\bar{M}$  forment une partition (toute personne est soit malade, soit non malade),

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = P(M)P_M(T) + P(\bar{M})P_{\bar{M}}(T).$$

**Étape 1 : décomposer selon  $M$  et  $\overline{M}$ .**

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T).$$

**Étape 2 : calculer chaque chemin menant à  $T$ .** On a déjà  $P(M \cap T) = 0,0198$  (question 2), et

$$P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,98 \times 0,05 = 0,049.$$

**Étape 3 : additionner.**

$$P(T) = 0,0198 + 0,049 = 0,0688.$$

$$P(T) = 0,0688.$$

**Question 4. Probabilité d'être malade sachant le test positif.**

Rappel de cours

**Probabilité conditionnelle :**  $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$ . C'est la proportion de vrais malades parmi toutes les personnes ayant un test positif.

**Étape 1 : appliquer la formule.**

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0198}{0,0688}.$$

**Étape 2 : simplifier la fraction.** On multiplie haut et bas par 10 000 :  $\frac{0,0198}{0,0688} = \frac{198}{688}$ . On divise

par 2 :  $\frac{198}{688} = \frac{99}{344}$ .

**Étape 3 : valeur approchée.**  $\frac{99}{344} \approx 0,288$ .

Pour comprendre

Bien que le test soit très fiable, une personne au test positif n'a qu'environ 29 % de chances d'être réellement malade. La raison : la maladie est rare (seulement 2 %). Les très nombreux non-malades produisent une masse de « faux positifs » ( $0,98 \times 0,05 = 0,049$ ) bien supérieure au nombre de vrais malades positifs (0,0198). C'est un phénomène classique des tests de dépistage de maladies rares.

$$P_T(M) = \frac{99}{344} \approx 0,288 : \text{moins d'un tiers des tests positifs correspond à un vrai malade.}$$

**Question 5. Loi de  $X$ .**

Rappel de cours

**Schéma de Bernoulli :** on répète  $n$  fois, de façon *indépendante*, une même épreuve à deux issues (succès de probabilité  $p$ , échec de probabilité  $1 - p$ ). Le nombre de succès suit la **loi binomiale**  $\mathcal{B}(n; p)$ .

On vérifie les conditions : chaque composant donne une épreuve identique (être défectueux ou non), avec une probabilité de « succès »  $p = 0,02$ , et les composants sont indépendants. On en prélève  $n$ . La variable  $X$  compte le nombre de composants défectueux, c'est-à-dire le nombre de succès.

$X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n; 0,02)$ .

**Question 6. Cas  $n = 50$ .**

**Rappel de cours**

Pour  $X \sim \mathcal{B}(n; p)$  :  $E(X) = np$ ,  $V(X) = np(1-p)$ , donc  $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ ; et  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ .

Ici  $n = 50$  et  $p = 0,02$  (donc  $1 - p = 0,98$ ).

**Étape 1 : espérance.**  $E(X) = np = 50 \times 0,02 = 1$ .

**Étape 2 : écart-type.**

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{50 \times 0,02 \times 0,98} = \sqrt{0,98} \approx 0,99.$$

**Étape 3 :  $P(X = 0)$ .**

$$P(X = 0) = \binom{50}{0} (0,02)^0 (0,98)^{50} = 1 \times 1 \times 0,98^{50} = 0,98^{50}.$$

**Étape 4 :  $P(X \geq 2)$ .** On passe par l'événement contraire  $\{X = 0\} \cup \{X = 1\}$ . Or

$$P(X = 1) = \binom{50}{1} (0,02)^1 (0,98)^{49} = 50 \times 0,02 \times 0,98^{49} = 0,98^{49}$$

(car  $50 \times 0,02 = 1$ ). Donc

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,98^{50} - 0,98^{49}.$$

$E(X) = 1$ ,  $\sigma(X) = \sqrt{0,98} \approx 0,99$ ,  $P(X = 0) = 0,98^{50}$ ,  $P(X \geq 2) = 1 - 0,98^{50} - 0,98^{49}$ .

**Question 7. Plus petit  $n$  tel que  $P(X \geq 1) \geq 0,95$ .**

**Rappel de cours**

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n$ .

Quand on divise une inégalité par  $\ln(0,98)$ , qui est **négalif**, le sens de l'inégalité s'inverse.

**Étape 1 : traduire la condition.**

$$P(X \geq 1) \geq 0,95 \iff 1 - 0,98^n \geq 0,95 \iff 0,98^n \leq 0,05.$$

**Étape 2 : appliquer  $\ln$ .** La fonction  $\ln$  étant croissante,

$$0,98^n \leq 0,05 \iff \ln(0,98^n) \leq \ln 0,05 \iff n \ln 0,98 \leq \ln 0,05.$$

**Étape 3 : diviser par  $\ln 0,98 < 0$  (sens inversé).**

$$n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,98}.$$

**Étape 4 : application numérique.**

$$\frac{\ln 0,05}{\ln 0,98} \approx \frac{-2,996}{-0,0202} \approx 148,3.$$

Le plus petit entier supérieur ou égal à 148,3 est 149.

**Vérification**

Pour  $n = 149$  :  $0,98^{149} \approx e^{149 \times (-0,0202)} \approx e^{-3,01} \approx 0,049 < 0,05$ , donc  $P(X \geq 1) \approx 0,951 \geq 0,95$ .  
Pour  $n = 148$ , on trouve  $\approx 0,949 < 0,95$  : 149 est bien le plus petit.

$$n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,98} \approx 148,3, \text{ donc le plus petit entier convenable est } n = 149.$$

## Exercice VII Variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres

### Question 1. Espérance et variance de $X$ .

#### Rappel de cours

**Espérance :**  $E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$ .

**Variance :**  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ , où  $E(X^2) = \sum_i x_i^2 P(X = x_i)$ . La variance mesure la dispersion autour de la moyenne.

Loi de  $X$  :  $P(X = -1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(X = 0) = \frac{1}{4}$ ,  $P(X = 2) = \frac{1}{4}$ .

#### Étape 1 : espérance.

$$E(X) = (-1) \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 0.$$

#### Étape 2 : moment d'ordre deux. On élève chaque valeur au carré :

$$E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} = 1 \times \frac{1}{2} + 0 + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

#### Étape 3 : variance.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{2} - 0^2 = \frac{3}{2}.$$

$$E(X) = 0 \text{ et } V(X) = \frac{3}{2}.$$

### Question 2. Écart-type de $X$ .

#### Rappel de cours

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,22.$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,22.$$

### Question 3. Espérance et variance d'une variable de Bernoulli.

#### Rappel de cours

Une variable  $X_i$  de **loi de Bernoulli** de paramètre  $p$  vaut 1 avec probabilité  $p$  et 0 avec probabilité  $1 - p$ . On a alors  $E(X_i) = p$  et  $V(X_i) = p(1 - p)$  (résultats du cours).

C'est une application directe du cours.

$$E(X_i) = p \text{ et } V(X_i) = p(1 - p).$$

### Question 4. Espérance et variance de $F_n$ (démonstration exigée).

## Rappel de cours

**Linéarité de l'espérance :**  $E(aX) = aE(X)$  et  $E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$  (toujours vrai).

**Variance :**  $V(aX) = a^2 V(X)$ ; et si les variables sont **indépendantes**,  $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$ .

**Étape 0 : poser la somme.** On note  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , de sorte que  $F_n = \frac{S}{n}$ .

**Étape 1 : espérance.** Par linéarité de l'espérance,

$$E(F_n) = E\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{1}{n} E(S) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \times (np) = p,$$

puisque chaque  $E(X_i) = p$  et qu'il y a  $n$  termes.

**Étape 2 : variance.** On sort d'abord le facteur  $\frac{1}{n}$  au carré :

$$V(F_n) = V\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(S).$$

Les  $X_i$  étant indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances :

$$V(S) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = np(1-p).$$

D'où

$$V(F_n) = \frac{1}{n^2} \times np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

$$E(F_n) = p \text{ et } V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

## Question 5. Majoration et inégalité de concentration.

## Rappel de cours

**Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (admise) :** pour tout  $\delta > 0$ ,  $P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{V(F_n)}{\delta^2}$ .

Pour majorer  $p(1-p)$ , on étudie la fonction  $g(p) = p(1-p)$  sur  $[0; 1]$ .

**Étape 1 : majorer  $p(1-p)$ .** On pose  $g(p) = p(1-p) = p - p^2$  pour  $p \in [0; 1]$ . Sa dérivée est  $g'(p) = 1 - 2p$ , qui s'annule en  $p = \frac{1}{2}$ ;  $g$  croît sur  $[0; \frac{1}{2}]$  puis décroît sur  $[\frac{1}{2}; 1]$ . Le maximum est donc

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, pour tout  $p \in [0; 1]$ ,  $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ .

**Étape 2 : appliquer l'inégalité.** On reporte  $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$  dans Bienaymé-Tchebychev, puis on majore par  $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$  :

$$P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{V(F_n)}{\delta^2} = \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

$$\text{Pour tout } \delta > 0 : P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Question 6. Détermination de  $n$  et loi des grands nombres.

**Rappel de cours**

**Loi des grands nombres :** la fréquence  $F_n$  se rapproche de la probabilité  $p$  quand  $n$  augmente. L'inégalité de concentration permet de *quantifier* ce rapprochement et de choisir une taille d'échantillon.

**Étape 1 : poser la condition suffisante.** Il suffit que la majoration  $\frac{1}{4n\delta^2}$  soit inférieure à 0,05, avec  $\delta = 0,01$ . Comme  $\delta^2 = (0,01)^2 = 10^{-4}$  :

$$\frac{1}{4n \times 10^{-4}} \leq 0,05.$$

**Étape 2 : résoudre.** On passe l'inverse de l'autre côté (les deux membres sont positifs) :

$$4n \times 10^{-4} \geq \frac{1}{0,05} = 20 \iff n \geq \frac{20}{4 \times 10^{-4}} = \frac{20}{0,0004} = 50\,000.$$

**Étape 3 : interprétation.** Avec  $n = 50\,000$  personnes interrogées, la probabilité que la fréquence observée  $F_n$  s'écarte de la vraie proportion  $p$  de plus de 0,01 est au plus de 5%, et ce quelle que soit la valeur inconnue de  $p$ . C'est une version chiffrée de la loi des grands nombres.

$n = 50\,000$  convient :  $P(|F_n - p| \geq 0,01) \leq 0,05$  pour toute valeur de  $p$ .

## Exercice VIII Combinatoire et dénombrement

### Question 1. Codes de quatre chiffres.

#### Rappel de cours

**Principe multiplicatif** : pour un choix en plusieurs étapes indépendantes, on multiplie les nombres de possibilités.

Le nombre de  $p$ -listes (ordre important, répétitions autorisées) d'un ensemble à  $n$  éléments est  $n^p$ .

Le nombre d'**arrangements** de  $p$  éléments parmi  $n$  (ordre important, sans répétition) est  $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ .

a) **Codes quelconques.** Chacun des 4 chiffres se choisit librement parmi les 10 chiffres  $0, 1, \dots, 9$  :

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000.$$

b) **Codes à chiffres distincts.** On choisit les chiffres l'un après l'autre, sans répétition : 10 choix pour le premier, 9 pour le deuxième (un de moins), 8 pour le troisième, 7 pour le quatrième :

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040.$$

a) 10 000 codes au total ; b) 5 040 codes à chiffres distincts.

### Question 2. Comités de quatre personnes (5 femmes, 7 hommes).

#### Rappel de cours

**Combinaisons** : pour choisir  $k$  éléments parmi  $n$  sans tenir compte de l'ordre (par exemple un comité), on compte  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Pour « au moins un », il est souvent plus simple de passer par l'événement contraire « aucun ».

a) **Nombre total de comités.**

$$\binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{11\,880}{24} = 495.$$

b) **Exactement 2 femmes et 2 hommes.** On choisit 2 femmes parmi 5 et 2 hommes parmi 7 (étapes indépendantes, on multiplie) :

$$\binom{5}{2} \times \binom{7}{2} = \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{7 \times 6}{2} = 10 \times 21 = 210.$$

c) **Au moins une femme.** L'événement contraire est « aucune femme », soit un comité formé de 4 hommes choisis parmi 7 :

$$\binom{7}{4} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35.$$

On retranche du total :

$$\binom{12}{4} - \binom{7}{4} = 495 - 35 = 460.$$

a) 495 comités; b) 210 comités; c) 460 comités avec au moins une femme.

### Question 3. Relation de Pascal.

#### Rappel de cours

**Relation de Pascal :** pour  $1 \leq k \leq n-1$ ,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

C'est la règle de construction du triangle de Pascal : chaque coefficient est la somme des deux situés juste au-dessus.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

### Question 4. Deux sommes par la formule du binôme.

#### Rappel de cours

**Formule du binôme de Newton :**  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ . On l'applique avec des valeurs bien choisies de  $a$  et  $b$ .

**Première somme :**  $a = b = 1$ . Comme  $1^k = 1$  et  $1^{n-k} = 1$  :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

et le membre de gauche vaut  $2^n$ . Donc  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

**Seconde somme :**  $a = -1$ ,  $b = 1$  (avec  $n \geq 1$ ). Ici  $a^k = (-1)^k$  :

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k},$$

et le membre de gauche vaut  $0^n = 0$  (car  $n \geq 1$ ). Donc  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ .

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad \text{pour } n \geq 1.$$

### Question 5. Identité $\sum k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$ (démonstration exigée).

#### Rappel de cours

**Principe du double comptage :** si l'on dénombre un même ensemble de deux façons, les deux résultats sont nécessairement égaux. On compte ici le nombre de manières de former, parmi  $n$  personnes, un comité (de taille quelconque, éventuellement vide) et d'y désigner un président pris dans le comité.

a) **En choisissant d'abord le comité.** Pour une taille  $k$  donnée, on choisit le comité de  $\binom{n}{k}$  façons, puis le président parmi ses  $k$  membres, soit  $k$  possibilités, ce qui fait  $k \binom{n}{k}$  couples. En sommant sur toutes les tailles possibles  $k = 0, 1, \dots, n$ , le nombre total de couples (comité, président) est

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

(Le terme  $k = 0$  vaut 0 : un comité vide n'a pas de président, ce qui est cohérent.)

b) **En choisissant d'abord le président.** On choisit d'abord le président parmi les  $n$  personnes :  $n$  possibilités. Ensuite, chacune des  $n - 1$  personnes restantes est, librement et indépendamment, membre ou non du comité : cela donne  $2^{n-1}$  possibilités. Le nombre total de couples est donc

$$n \times 2^{n-1}.$$

c) **Conclusion.** Les deux décomptes portent sur le même ensemble de couples, donc ils sont égaux :

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

#### Remarque

On peut vérifier sur un petit cas : pour  $n = 2$ , le membre de gauche vaut  $0 \binom{2}{0} + 1 \binom{2}{1} + 2 \binom{2}{2} = 0 + 2 + 2 = 4$ , et le membre de droite vaut  $2 \times 2^1 = 4$ . Les deux coïncident.

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

---

FIN DU CORRIGÉ.